CHƯƠNG 1 : ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM
ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

==

Bài 1: Sự đồng biến và nghịch biến của hàm số.

A. Lý thuyết

1. Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên K, trong đó K là một khoảng, đoạn hoặc nữa khoảng.

a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K nếu mọi $x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

b) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên K nếu mọi $x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

2. Định lí

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K.

a) Nếu $f'(x) > 0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên K.

b) Nếu $f'(x) < 0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên K.

c) Nếu $f'(x) = 0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $f(x)$ không đổi trên K.

Chú ý: Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$ và có đạo hàm $f'\left(x\right)>0$ trên khoảng $\left(a;b\right)$ thì hàm số f đồng biến trên đoạn $\left[a;b\right]$. Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$ và có đạo hàm $f'\left(x\right)< 0$ trên khoảng $\left(a;b\right)$ thì hàm số f nghịch biến trên đoạn $\left[a;b\right]$.

3. Định lí mở rộng:

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K.

a) Nếu $f'(x) \geq 0$ với mọi x thuộc K và $f'(x) = 0$ xảy ra tại một số hữu hạn điểm của K thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên K.

b) Nếu $f'(x) \leq 0$ với mọi x thuộc K và $f'(x) = 0$ xảy ra tại một số hữu hạn điểm của K thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên K.

4. Qui tắc xét tính đơn điệu của hàm số

Bước 1: Tìm tập xác định.

Bước 2: Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm $x_i\left(i = 1, 2, \ldots, n\right)$ mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.

Bước 3: Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.

Bước 4: Nêu kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

B. Ví dụ minh họa

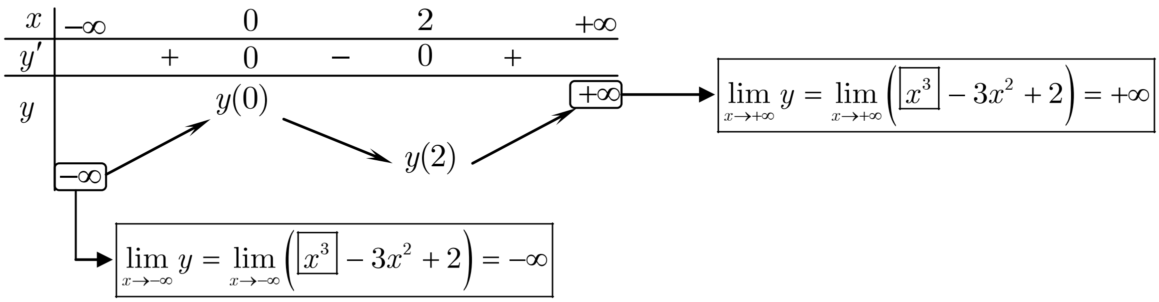
Ví dụ 1: Xét tính đơn điệu của mỗi hàm số sau:

a. $y = x^3 - 3x^2 + 2$ b. $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$ c. $y = x^3 + 2x$

Hướng dẫn giải

a. $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

- Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- Ta có: $y' = 3x^2 - 6x$, cho $y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 2$.
- Bảng biến thiên:



- Dựa vào bảng biến thiên suy ra:
  - ✓ Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$.
  - ✓ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

Chú ý: Không được kết luận: *"Hàm số đồng biến trên khoảng* $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$*"*

b. $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$

- Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- Ta có: $y' = -3x^2 + 6x - 3$, cho $y' = 0 \Rightarrow -3x^2 + 6x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1$ (nghiệm kép)
  $\Rightarrow y' \le 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số luôn nghịch biến trên tập xác định $\mathbb{R}$.

c. $y = x^3 + 2x$.

- Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- $y' = 3x^2 + 2$, cho $y' = 0 \Rightarrow 3x^2 + 2 = 0$ (vô nghiệm)
  $\Rightarrow y' > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số luôn đồng biến trên tập xác định $\mathbb{R}$.

Ví dụ 2: Xét tính đơn điệu của mỗi hàm số sau:

a. $y = x^4 - 2x^2 + 1$ b. $y = -x^4 + x^2 - 2$ c. $y = \dfrac{1}{4}x^4 + 2x^2 - 1$

Hướng dẫn giải

a. $y = x^4 - 2x^2 + 1$

- Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- $y' = 4x^3 - 4x = 4x\left(x^2 - 1\right)$, cho $y' = 0 \Rightarrow x = 0$ hoặc $x = -1$ hoặc $x = 1$.
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	$y(-1)$	↗	$y(0)$	↘	$y(1)$	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\boxed{x^4}-2x^2-1\right)=+\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\boxed{x^4}-2x^2-1\right)=+\infty$

- Dựa vào bảng biến thiên suy ra:
  - ✓ Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.
  - ✓ Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

b. $y=-x^4+x^2-2$

- Hàm số xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$.
- $y'=-4x^3+2x=2x\left(-2x^2+1\right)$, cho $y'=0\Rightarrow x=0$ hoặc $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ hoặc $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	$y\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$	↘	$y(0)$	↗	$y\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$	↘	$-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\boxed{-x^4}+x^2-2\right)=-\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\boxed{-x^4}+x^2-2\right)=-\infty$

- Dựa vào bảng biến thiên suy ra:
  - ✓ Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty;-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ và $\left(0;\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
  - ✓ Hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};0\right)$ và $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right)$.

c. $y=\dfrac{1}{4}x^4+2x^2-1$.

- Hàm số xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$.
- $y'=x^3+4x=x\left(x^2+4\right)$, cho $y'=0\Rightarrow x=0$ (do $x^2+4=0$ vô nghiệm).
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$\boxed{+\infty}$	$\searrow$	$y(0)$	$\nearrow$	$\boxed{+\infty}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\boxed{\frac{1}{4}x^4}+2x^2-1\right)=+\infty}$ $\qquad$ $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\boxed{\frac{1}{4}x^4}+2x^2-1\right)=+\infty}$

- Từ bảng biến thiên suy ra: Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

> ***Ví dụ 3:*** Xét tính đơn điệu của mỗi hàm số sau:
> a. $y = x^4 + 4x^3 + 3$ $\qquad$ b. $y = x^5 - x^3 - 2x + 4$

Hướng dẫn giải

a. $y = x^4 + 4x^3 + 3$

- Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- $y' = 4x^3 + 12x^2 = 4x^2(x+3)$, cho $y' = 0 \Rightarrow x = 0$ (nghiệm kép) hoặc $x = -3$.
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	
y	$\boxed{+\infty}$	$\searrow$	$y(-3)$	$\nearrow$		$\nearrow$	$\boxed{+\infty}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\boxed{x^4}+4x^3+3\right)=+\infty}$ $\qquad$ $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\boxed{x^4}+4x^3+3\right)=+\infty}$

- Từ bảng biến thiên suy ra: Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3;+\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-3)$.

b. $y = x^5 - x^3 - 2x + 4$

- Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- $y' = 5x^4 - 3x^2 - 2$, cho $y' = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{2}{5}$ (vô nghiệm) hoặc $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ hoặc $x = -1$.
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$\boxed{-\infty}$	$\nearrow$	$y(-1)$	$\searrow$	$y(1)$	$\nearrow$	$\boxed{+\infty}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\boxed{x^5}-x^3-2x+4\right)=-\infty}$ $\qquad$ $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\boxed{x^5}-x^3-2x+4\right)=-\infty}$

- Từ bảng biến thiên suy ra:
  - ✓ Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$.
  - ✓ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

Ví dụ 4: Xét tính đơn điệu của mỗi hàm số sau:

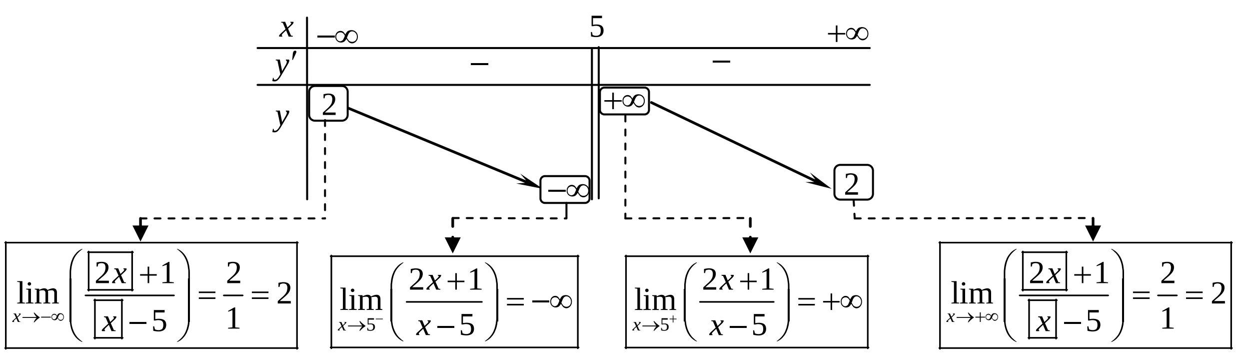
a. $y=\dfrac{2x+1}{x-5}$ **b.** $y=\dfrac{x+2}{x+3}$

Hướng dẫn giải

a. $y=\dfrac{2x+1}{x-5}$

- Hàm số xác định với mọi $x\neq 5$.
- Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{5\}$.
- $y'=\dfrac{2.(-5)-1.1}{(x-5)^2}=\dfrac{-11}{(x-5)^2}<0,\forall x\neq 5$. Suy ra hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định, tức là hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;5)$ và $(5;+\infty)$.

Cách khác: Lập bảng biến thiên:



- Từ bảng biến thiên suy ra: Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;5)$ và $(5;+\infty)$.

b. $y=\dfrac{x+2}{x+3}$

- Hàm số xác định với mọi $x\neq -3$.
- Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$.
- $y'=\dfrac{1.3-1.2}{(x+3)^2}=\dfrac{1}{(x+3)^2}>0,\forall x\neq -3$. Suy ra hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định, tức là hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-3)$ và $(-3;+\infty)$.

Cách khác: Lập bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	1	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	1

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\boxed{x}+2}{\boxed{x}+3}\right)=\frac{1}{1}=1 \qquad \lim_{x\to(-3)^-}\left(\frac{x+2}{x+3}\right)=+\infty \qquad \lim_{x\to(-3)^+}\left(\frac{2x+1}{x-5}\right)=-\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\boxed{x}+2}{\boxed{x}+3}\right)=\frac{1}{1}=1$$

- Từ bảng biến thiên suy ra: Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-3)$ và .$(-3;+\infty)$..

Ví dụ 5: Xét tính đơn điệu của mỗi hàm số sau:

a. $y=\dfrac{2x^2+x+1}{2x-1}$ **b.** $y=\dfrac{x}{x^2+1}$

c. $y=\dfrac{2x}{x^2-9}$ **d.** $y=\dfrac{x^2+8x-24}{x^2-4}$

Hướng dẫn giải

a. $y=\dfrac{2x^2+x+1}{2x-1}$

- Hàm số xác định với mọi $x\neq\dfrac{1}{2}$.
- Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.
- $y'=\dfrac{(4x+1)(2x-1)-2(2x^2+x+1)}{(2x-1)^2}=\dfrac{4x^2-4x-3}{(2x-1)^2}$, cho $y'=0\Rightarrow 4x^2-4x-3=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$

  hoặc $x=\dfrac{3}{2}$.
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$\frac{7}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\boxed{2x^2}+x+1}{\boxed{2x}-1}\right)=-\infty \qquad \lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-}\left(\frac{2x^2+x+1}{2x-1}\right)=-\infty \qquad \lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+}\left(\frac{2x^2+x+1}{2x-1}\right)=+\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\boxed{2x^2}+x+1}{\boxed{2x}-1}\right)=+\infty$$

- Từ bảng biến thiên suy ra:
  - ✓ Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$ và $\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$.
  - ✓ Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ và $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$.

b. $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

- Vì $x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- Tập xác định $D = \mathbb{R}$.
- $y' = \dfrac{1.\left(x^2+1\right) - 2x.x}{\left(x^2+1\right)^2} = \dfrac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}$, cho $y' = 0 \Rightarrow -x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 1$.
- Bảng biến thiên:

$$\begin{array}{c|ccccccc}
x & -\infty & & -1 & & 1 & & +\infty \\
\hline
y' & & - & 0 & + & 0 & - & \\
\hline
y & \boxed{0} & \searrow & \frac{-1}{2} & \nearrow & \frac{1}{2} & \searrow & \boxed{0}
\end{array}$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\boxed{x}}{\boxed{x^2}+1}\right) = 0} \qquad \boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\boxed{x}}{\boxed{x^2}+1}\right) = 0}$$

- Từ bảng biến thiên suy ra:
  - ✓ Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-1;1\right)$.
  - ✓ Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;-1\right)$ và $\left(1;+\infty\right)$.

c. $y = \dfrac{2x}{x^2 - 9}$

- Hàm số xác định khi $x^2 - 9 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 3$.
- Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-3;3\right\}$.
- Ta có $y' = \dfrac{2\left(x^2-9\right) - 2x.2x}{\left(x^2-9\right)^2} = \dfrac{-2x^2-18}{\left(x^2-9\right)^2} < 0, \forall x \neq \pm 3$.
- Bảng biến thiên :

$$\begin{array}{c|ccc||ccc||cc}
x & -\infty & & -3 & & & 3 & & +\infty \\
\hline
y' & & - & & & - & & - & \\
\hline
y & 0 & \searrow & -\infty & +\infty & \searrow & -\infty & +\infty \searrow & 0
\end{array}$$

- Từ bảng biến thiên suy ra : Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;-3\right), \left(-3;3\right)$ và $\left(3;+\infty\right)$.

d. $y = \dfrac{x^2 + 8x - 24}{x^2 - 4}$

- Hàm số xác định khi $x^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 2$.
- Tập xác định : $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-2;2\right\}$.

- Ta có $y' = \dfrac{(2x+8)(x^2-4) - 2x(x^2+8x-24)}{(x^2-4)^2} = \dfrac{-8x^2+40x-32}{(x^2-4)^2}$, cho

  $y' = 0 \Leftrightarrow -8x^2+40x-32 = 0 \Leftrightarrow\ x = 1$ hoặc $x = 4$.
- Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-2		1		2		4		$+\infty$
y'		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
y	1	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

- Từ bảng biến thiên suy ra :
  - ✓ Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;2)$ và $(2;4)$.
  - ✓ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$, $(-2;1)$ và $(4;+\infty)$.

Ví dụ 6: Xét tính đơn điệu của mỗi hàm số sau:

a. $y = \sqrt{x^2-x-20}$ **b.** $y = \sqrt{2x-x^2}$

c. $y = -x+\sqrt{x^2+8}$ **d.** $y = x\sqrt{3-x}$

Hướng dẫn giải

a. $y = \sqrt{x^2-x-20}$

- Hàm số xác định khi $x^2-x-20 \ge 0 \Leftrightarrow x \le -4$ hoặc $x \ge 5$.
- Tập xác định : $D = (-\infty;-4) \cup (5;+\infty)$
- Ta có $y' = \dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-20}}$, cho $y' = 0 \Leftrightarrow 2x-1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.
- Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-4		5		$+\infty$
y'		$-$	$\Vert$	//////	$\Vert$	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	//////	0	$\nearrow$	$+\infty$

- Từ bảng biến thiên suy ra :
  - ✓ Hàm số đồng biến trên khoảng $(5;+\infty)$.
  - ✓ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-4)$.

b. $y = \sqrt{2x-x^2}$ **.**

- Hàm số xác định khi $2x-x^2 \ge 0 \Leftrightarrow 0 \le x \le 2$.
- Tập xác định: $D = [0;2]$.
- Ta có $y' = \dfrac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}$, cho $y' = 0\ \Leftrightarrow 1-x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
- Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'			$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$		
y			0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0		

- Từ bảng biến thiên suy ra :
  - ✓ Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$.
  - ✓ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;2)$.

c. $\boldsymbol{y = -x + \sqrt{x^2 + 8}}$ **.**

- Tập xác định $D = \mathbb{R}$ (vì $x^2 + 8 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$)
- Ta có $y' = -1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 + 8}}$, cho $y' = 0 \Leftrightarrow -\sqrt{x^2 + 8} + x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 8} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 + 8 = x^2 \end{cases}$ (vô nghiệm)
- Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-x + \sqrt{x^2 + 8}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(-x + (-x)\sqrt{1 + \frac{8}{x^2}}\right) = \lim_{x\to-\infty} x\left(-1 - \sqrt{1 + \frac{8}{x^2}}\right) = +\infty .$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-x + \sqrt{x^2 + 8}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2 + 8} - x\right)\left(\sqrt{x^2 + 8} + x\right)}{\sqrt{x^2 + 8} + x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{8}{x\left(\sqrt{1 + \frac{8}{x^2}} + 1\right)} = 0.\frac{8}{1+1} = 0$$

- Từ bảng biến thiên suy ra : Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

d. $\boldsymbol{y = x\sqrt{3 - x}}$ **.**

- Hàm số xác định khi $3 - x \ge 0 \Leftrightarrow x \le 3$.
- Tập xác định : $D = (-\infty;3]$.
- Ta có $y' = \sqrt{3 - x} + x.\dfrac{-1}{2\sqrt{3 - x}} = \dfrac{2(3 - x) - x}{2\sqrt{3 - x}}$, cho $y' = 0 \Leftrightarrow 6 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = 2$.
- Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\Vert$		
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0		

- Từ bảng biến thiên suy ra :
  - ✓ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;2)$.

✓ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;3)$.

Ví dụ 7: **a.** Tìm m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{m}{2}x^2+mx-m+2018$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b. Tìm m để hàm số $y=-\frac{1}{3}(m+2)x^3+(m+2)x^2-mx-2$ nghịch biến trên tập xác định của nó.

Hướng dẫn giải

Nhắc lại : "Điều kiện để tam thức bậc hai không đổi dấu trên $\mathbb{R}$".

Cho $f(x)=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$

✦ $f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta<0\end{cases}$.

✦ $f(x)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta\leq 0\end{cases}$.

✦ $f(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\ \Delta<0\end{cases}$.

✦ $f(x)\leq 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\ \Delta\leq 0\end{cases}$.

Chú ý: khi hệ số a chưa khác không phải xét 2 TH : $\left[\begin{array}{l}TH_1: a=0\\ TH_2: a\neq 0\end{array}\right.$

a. Tìm m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{m}{2}x^2+mx-m+2018$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- Tập xác định : $D=\mathbb{R}$.
- Ta có: $y'=x^2-mx+m$.
- Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $y'\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x^2-mx+m\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\Delta\leq 0$

  $\Leftrightarrow m^2-4m\leq 0 \Leftrightarrow 0\leq m\leq 4$.
- Vậy $m\in[0;4]$ là giá trị cần tìm.

b. Tìm m để hàm số $y=-\frac{1}{3}(m+2)x^3+(m+2)x^2-mx-2$ nghịch biến trên tập xác định của nó.

- Tập xác định : $D=\mathbb{R}$.
- Ta có : $y'=-(m+2)x^2+2(m+2)x-m$.
- Để hàm số nghịch biến trên tập xác định của nó thì $y'\leq 0,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow -(m+2)x^2+2(m+2)x-m\leq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ (*)

TH1: $a=0\Rightarrow -(m+2)=0\Leftrightarrow m=-2$. Khi đó (*) $\Leftrightarrow 2\leq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ (vô lý)

Suy ra $m=-2$ (loại).

TH2: $a \neq 0 \Rightarrow -(m+2) \neq 0 \Rightarrow m \neq -2$. Khi đó $(*) \Rightarrow \begin{cases} a = -(m+2) < 0 \\ \Delta = 2m + 4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ m \leq -2 \end{cases}$ (vô nghiệm)

- Vậy không có giá trị nào của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 8: **a.** Tìm m để hàm số $y = \dfrac{2x - m}{x + 3}$ đồng biến trên từng khoảng xác định.

b. Tìm m để hàm số $y = \dfrac{mx + 4}{x + m}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định.

Hướng dẫn giải

a. Tìm m để hàm số $y = \dfrac{2x - m}{x + 3}$ đồng biến trên từng khoảng xác định.

- Hàm số xác định khi $x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$.
- Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\} = (-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$.
- Ta có: $y' = \dfrac{2.3 - 1.(-m)}{(x+3)^2} = \dfrac{6 + m}{(x+3)^2}$.
- Để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định thì $y' > 0, \forall x \neq -3 \Leftrightarrow 6 + m > 0 \Leftrightarrow m > -6$.
- Vậy $m > -6$ là giá trị cần tìm.

Chú ý: Ở ví dụ trên ta không cho điều kiện $y' \geq 0$, $\forall x \neq -3$ (bỏ dấu " = ") vì tại $y' = 0 \Leftrightarrow m = -6$ hàm số có dạng $y = \dfrac{2x + 6}{x + 3}$ hay $y = 2$, khi đó phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ tại vô số nghiệm $x \in \mathbb{R}$ (không xảy ra tại hữu hạn điểm). Do đó điều kiện bài toán này là $y' > 0, \forall x \neq -3$.

b.Tìm m để hàm số $y = \dfrac{mx + 4}{x + m}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định.

- Hàm số xác định khi $x + m \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -m$.
- Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\} = (-\infty; -m) \cup (-m; +\infty)$.
- Ta có: $y' = \dfrac{m.m - 1.4}{(x+m)^2} = \dfrac{m^2 - 4}{(x+m)^2}$.
- Để hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định thì $y' < 0, \forall x \neq -m$

$$\Leftrightarrow m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2.$$

- Vậy giá trị của m cần tìm là $-2 < m < 2$.

Ví dụ 9: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 3(m+1)x - m - 1$

a. Tìm m để hàm số đồng biến trên $\left[1 : +\infty\right)$.

b. Tìm m để hàm số nghịch biến trên $\left[-1;3\right]$.

Hướng dẫn giải

- **TXĐ:** $D = R$
- Ta có $y' = 3x^2 - 6x - 3(m+1)$

a. Tìm m để hàm số đồng biến trên $\left[1 : +\infty\right)$.

- Để hàm số đồng biến trên $\left[1 : +\infty\right)$ thì $y' \geq 0 \quad \forall x \in \left[1 : +\infty\right)$

$$\Rightarrow 3x^2 - 6x - 3(m+1) \geq 0 \qquad \forall x \in \left[1 : +\infty\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - m - 1 \geq 0 \qquad \forall x \in \left[1 : +\infty\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 \geq m \qquad \forall x \in \left[1 : +\infty\right)$$

- Đặt $f(x) = x^2 - 2x - 1 \Rightarrow f'(x) = 2x - 2$
- Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- Ta có bảng biến thiên

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

- Từ bảng biến thiên ta có: $f(x) \geq m \Rightarrow \underset{x \in \left[1:+\infty\right)}{Min} f(x) \geq m \Rightarrow m \leq -2$
- Vậy $m \leq -2$ thì hàm số đồng biến trên $\left[1 : +\infty\right)$

b. Tìm .m. để hàm số nghịch biến trên $\left[-1;3\right]$.

- Để hàm số nghịch biến trên $\left[-1;3\right]$ thì $y' \leq 0 \quad \forall x \in \left[-1;3\right]$

$$\Rightarrow 3x^2 - 6x - 3(m+1) \leq 0 \qquad \forall x \in \left[-1;3\right]$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - m - 1 \leq 0 \qquad \forall x \in \left[-1;3\right]$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 \leq m \qquad \forall x \in \left[-1;3\right]$$

- Đặt $f\left(x\right)=x^2-2x-1\Rightarrow f'\left(x\right)=2x-2$
- Cho $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=1$
- Ta có bảng biến thiên

x	-1		1		3
$f'\left(x\right)$		$-$	0	$+$	
$f\left(x\right)$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2

- Từ bảng biến thiên ta có: $f\left(x\right)\le m\Rightarrow \underset{x\in\left[-1;3\right]}{Max}f\left(x\right)\le m\Rightarrow m\ge 2$
- Vậy $m\ge 2$ thì hàm số nghịch biến trên $\left[-1;3\right]$

Ví dụ 8: Chứng minh rằng $\sin x<x$ với mọi x>0 .

Hướng dẫn giải

Chứng minh rằng $\sin x<x$ **với mọi x>0 .**

- Với $x\in\left[\frac{\pi}{2};+\infty\right)$ ta có $x\ge\frac{\pi}{2}>1\ge\sin x\Rightarrow x>\sin x$ (1)
- Với $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$
- Xét hàm số $f\left(x\right)=\sin x-x$ trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$
- Có $f'\left(x\right)=\cos x-1\le 0$ và $f'\left(x\right)=0$ tại hữu hạn điểm
- Vậy hàm số $f\left(x\right)=\sin x-x$ nghịch biến trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$
- Vậy với $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ $x>0\Rightarrow f\left(x\right)<0\Leftrightarrow\sin x<x$ (2)
- Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ đpcm

C. Bài tập luyện tập (trắc nghiệm)

Câu 1: Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=\left(x^2-1\right)^2-3x+2$. B. $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. C. $y=\dfrac{x}{x+1}$. D. $y=\tan x$.

Câu 2: Hàm số $y=\sqrt{2+x-x^2}$ nghịch biến trên khoảng:

A. $\left(\dfrac{1}{2};2\right)$. B. $\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$. C. $\left(2;+\infty\right)$. D. $\left(-1;2\right)$.

Câu 3: Hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$ đồng biến trên các khoảng:

A. $\left(-\infty;1\right)$ và $\left(3;+\infty\right)$. B. $\left(-\infty;-3\right)$ và $\left(1;+\infty\right)$.

C. $\left(-\infty;-3\right)$ và $\left(-1;+\infty\right)$. D. $\left(-\infty;-1\right)$ và $\left(3;+\infty\right)$.

Câu 4: Hàm số $y=\dfrac{x^2}{x-1}$ đồng biến trên các khoảng:

A. $\left(-\infty;1\right)$ và $\left(1;2\right)$. B. $\left(-\infty;0\right)$ và $\left(2;+\infty\right)$. C. $\left(0;1\right)$ và $\left(1;2\right)$. D. $\left(-\infty;1\right)$ và $\left(1;+\infty\right)$.

Câu 5: Cho hàm số $y=\sqrt{2x-x^2}$. Chọn mệnh đề đúng:

A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

C. Đồ thị hàm số đi qua điểm A(2;1).

D. Hàm số đồng biến trên khoảng (0;1) và nghịch biến trên khoảng (1;2).

Câu 6: Cho hàm số $y=\dfrac{x}{\sqrt{16-x^2}}$. Chọn mệnh đề đúng:

A. Hàm số có tập xác định là $\left[-4;4\right]$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng (-4;4).

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng (-4;4).

D. Đạo hàm của hàm số là $y'=-\dfrac{16}{\left(16-x^2\right)\sqrt{16-x^2}}$.

Câu 7: Cho hàm số $y=f(x)=-x^3+2x^2-x+3$. Hãy chọn câu đúng:

A. Hàm số có hai chiều biến thiên.

B. Hàm số tăng trong khoảng $\left(\dfrac{1}{3};1\right)$.

C. Hàm số giảm trong các khoảng $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$ và $(1;+\infty)$.

D. Cả ba câu trên đều đúng.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2x}{x-1}$. Hãy chọn câu đúng:

A. Hàm số có hai chiều biến thiên.

B. Hàm số tăng trong khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

C. Hàm số giảm trong các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

D. Hàm số giảm trên $\mathbb{R}$.

Câu 9: Tìm giá trị của tham số m để hàm số $y = 2x^3 - 5x^2 + 2mx - 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$:

A. $m > \frac{25}{12}$. B. $m < \frac{25}{12}$. C. $m \geq \frac{25}{12}$. D. $m \leq \frac{25}{12}$.

Câu 10: Tìm giá trị của tham số m để hàm số $y = mx - x^3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$:

A. $m > 0$. B. $m \leq 0$. C. $m \geq 0$. D. $m < 0$.

Câu 11: Tìm giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m-1)x^2 - (m-1)x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$:

A. $m \in (0;1)$. B. $m \in [0;1]$. C. $m \leq 0$ hay $m \geq 1$. D. $m < 0$ hay $m > 1$.

Câu 12: Tìm giá trị của tham số m để hàm số $y = -2x^3 + 3mx^2 - 2(m+5)x - 1$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$:

A. $m \in \left[-2;\frac{10}{3}\right]$. B. $m \in \left(-2;\frac{10}{3}\right)$.

C. $m \leq -2$ hay $m \geq \frac{10}{3}$. D. $m < -2$ hay $m > \frac{10}{3}$.

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (3m-2)x + m - 1$. Để hàm số luôn luôn tăng thì:

A. $1 \leq m \leq 2$. B. $m \leq 1 \vee m \geq 2$. C. $m < 1 \vee m > 2$. D. Không có giá trị của m.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{mx + 2 - m}{x + m}$ $(m \neq 2, \neq 1)$. Để hàm số luôn luôn nghịch biến trên tập xác định :

A. $m \leq -2 \vee m \geq 1$. B. $-2 \leq m \leq 1$. C. $-2 < m < 1$. D. m tùy ý.

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{mx-1}{x+m}$. Để hàm số luôn đồng biến trong các khoảng xác định:

A. $-1 \le m \le 1$. B. $m < -1 \vee m > 1$ C. Không có giá trị nào của m .D. Với mọi m.

Câu 16: Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{x^2 - m}{x-1}\left(m \ne 1\right)$. Chọn câu trả lời đúng:

A. Hàm số luôn luôn tăng trên $\left(-\infty;1\right)$ và $\left(1;+\infty\right)$.

B. Hàm số luôn luông giảm trên tập xác định

C. Hàm số luôn luôn tăng trên tập xác định với $m > 1$.

D. Hàm số luôn luôn giảm trên tập xác định với $m > 1$.

Câu 17: Tìm giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{\left(m^2+2\right)x + 3m}{x+1}$ đồng biến trên mỗi khoảng

xác định:

A. $m \in [1;2]$. B. $m \in (1;2)$. C. $m < 1$ hay $m > 2$. D. $m \le 1$ hay $m \ge 2$.

Câu 18: Tìm giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{mx+1}{x+m}$ nghịch biến trên mỗi khoảng xác định:

A. $m \in [-1;1]$. B. $m \in \left(-1;1\right)$. C. $m < -1$. D. $m > 1$.

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{x-m}{x+1}\left(m \ne -1\right)$. Với giá nào của m để hàm số giảm trong khoảng $\left(-1;+\infty\right)$.

A. $m > -1$. B. $m < -1$. C. $m < 1$ D. m tùy ý.

Câu 20: Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{x^2}{x+m}\left(m \ne 0\right)$. Tìm m để hàm số giảm trên tập xác định :

A. $m < 0$. B. $m > 0$. C. Với mọi $m \ne 0$ D. $m \in \varnothing$.

Câu 21: Tìm giá trị của tham số m để hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3mx - 1$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$:

A. $m > -1$. B. $m \le -1$. C. $m \ge -1$. D. $m < -1$.

Câu 22: Tìm giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{mx+4}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;1\right)$:

A. $m \in (-2;-1]$. B. $m \in \left(-2;-1\right)$. C. $m \in (-2;2)$. D. $m \in [-2;2]$.

Câu 23: Tìm giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$:

A. $m > -3$. B. $m \le -3$. C. $m \ge -3$. D. $m < -3$.

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x) = -x^2 + 4x + m^2 - 3m + 2$. Để hàm số giảm trong khoảng $(2;+\infty)$ thì:

A. $1 < m < 2$. B. $1 \le m \le 2$. C. $m < 1 \vee m > 2$. D. m tùy ý.

Câu 25: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và xác định trên [a; b]. Nếu hàm số đồng biến trên khoảng (a;b) và một số thực $m \in (a;b)$ thì khẳng định nào sau đây là ***đúng***?

A. $f(a) > f(m)$. **B.** $f(m) > f(b)$.

C. $f(m) < f(a)$ hoặc $f(m) > f(b)$. **D.** $f(a) < f(m) < f(b)$.

Câu 26: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và xác định trên [a; b]. Nếu hàm số nghịch biến trên khoảng (a;b) thì giá trị nhỏ nhất của hàm số trên [a; b] là

A. $f(a)$. **B.** $f(b)$. **C.** - $f(a)$. **D.** - $f(b)$.

Câu 27: Cho hàm số $f(x)$ có tính chất: $f'(x) \ge 0, \forall x \in (0;3)$ và $f'(x) = 0$ khi và chỉ khi $x \in [1;2]$. Hỏi khẳng định nào sau đây là khẳng định ***sai*** ?

A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;3)$.

B. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;3)$.

D. Hàm số $f(x)$ là hàm hằng (tức không đổi) trên khoảng $(1;2)$.

Câu 28: Giá trị b để hàm số $y = f(x) = \sin x - bx$ nghịch biến là

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $[1;+\infty)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;1]$.

Câu 29: So sánh $\cot x$ và $\cos x$ trong khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

A. $\cot x > \cos x$. **B.** $\cot x \ge \cos x$. **C.** $\cot x = \cos x$. **D.** $\cot x < \cos x$.

Câu 30: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{m\cos x - 4}{\cos x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right)$.

A. $1 \le m < 2$. **B.** $-2 < m \le 0$ hoặc $\frac{1}{2} \le m < 2$.

C. $m \ge 2$. **D.** $-2 < m \le 0$.

Câu 31: Hàm số $y = \sin x - x$

A. Đồng biến trên R. **B.** Đồng biến trên $(-\infty;0)$.

C. Nghịch biến trên R.   **D.** NB trên $(-\infty;0)$ va ĐB trên $(0;+\infty)$.

Câu 32: Xác định m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+(m+1)x^2+4x+7$ có độ dài khoảng nghịch biến bằng $2\sqrt{5}$ là

A. $m=-2;m=4$.   **B.** $m=1;m=3$.   **C.** $m=0;m=-1$.   **D.** $m=2;m=-4$.

D. Bài tập về nhà

Câu 1. Cho hàm số $y=\frac{x+1}{1-x}$. Khẳng định nào sao đây là khẳng đinh đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 2. Cho hàm số $y=-x^3+3x^2-3x+2$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

D. Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 3. Cho hàm số $y=-x^4+4x^2+10$ và các khoảng sau:

(I): $(-\infty;-\sqrt{2})$;   (II): $(-\sqrt{2};0)$;   (III): $(0;\sqrt{2})$;

Hỏi hàm số đồng biến trên các khoảng nào?

A. Chỉ (I).   **B.** (I) và (II).   **C.** (II) và (III).   **D.** (I) và (III).

Câu 4. Cho hàm số $y=\frac{3x-1}{-4+2x}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số luôn nghịch biến trên từng khoảng xác định.

C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$.

Câu 5. Hỏi hàm số nào sau đây luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $h(x)=x^4-4x^2+4$.   **B.** $g(x)=x^3+3x^2+10x+1$.

C. $f(x)=-\frac{4}{5}x^5+\frac{4}{3}x^3-x$. **D.** $k(x)=x^3+10x-\cos^2 x$.

Câu 6. Hỏi hàm số $y=\frac{x^2-3x+5}{x+1}$ nghịch biến trên các khoảng nào ?

A. $(-\infty;-4)$ và $(2;+\infty)$. **B.** $(-4;2)$.

C. $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$. **D.** $(-4;-1)$ và $(-1;2)$.

Câu 7. Hỏi hàm số $y=\frac{x^3}{3}-3x^2+5x-2$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(5;+\infty)$ **B.** $(2;3)$ **C.** $(-\infty;1)$ **D.** $(1;5)$

Câu 8. Hỏi hàm số $y=\frac{3}{5}x^5-3x^4+4x^3-2$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Câu 9. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$. Hỏi hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi nào?

A. $\left[\begin{array}{l}a=b=0,c>0\\a>0;b^2-3ac\le 0\end{array}\right.$. B. $\left[\begin{array}{l}a=b=0,c>0\\a>0;b^2-3ac\ge 0\end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l}a=b=0,c>0\\a<0;b^2-3ac\le 0\end{array}\right.$. D. $\left[\begin{array}{l}a=b=c=0\\a<0;b^2-3ac<0\end{array}\right.$.

Câu 10. Cho hàm số $y=x^3+3x^2-9x+15$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;1)$.

B. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số đồng biến trên $(-9;-5)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(5;+\infty)$.

Câu 11. Cho hàm số $y=\sqrt{3x^2-x^3}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

B. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0);(2;3)$.

C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;0);(2;3)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;3)$.

Câu 12. Cho hàm số $y=\frac{x}{2}+\sin^2 x, x\in[0;\pi]$. Hỏi hàm số đồng biến trên các khoảng nào?

A. $\left(0;\frac{7\pi}{12}\right)$ và $\left(\frac{11\pi}{12};\pi\right)$.

B. $\left(\frac{7\pi}{12};\frac{11\pi}{12}\right)$.

C. $\left(0;\frac{7\pi}{12}\right)$ và $\left(\frac{7\pi}{12};\frac{11\pi}{12}\right)$.

D. $\left(\frac{7\pi}{12};\frac{11\pi}{12}\right)$ và $\left(\frac{11\pi}{12};\pi\right)$.

Câu 13. Cho hàm số $y = x + \cos^2 x$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số đồng biến trên $\left(\frac{\pi}{4}+k\pi;+\infty\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;\frac{\pi}{4}+k\pi\right)$.

C. Hàm số nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{4}+k\pi;+\infty\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;\frac{\pi}{4}+k\pi\right)$.

D. Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 14. Cho các hàm số sau:

$(\text{I}): y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x + 4$; $(\text{II}): y = \frac{x-1}{x+1}$; $(\text{III}): y = \sqrt{x^2+4}$

$(\text{IV}): y = x^3 + 4x - \sin x$; $(\text{V}): y = x^4 + x^2 + 2$.

Có bao nhiêu hàm số đồng biến trên những khoảng mà nó xác định?

A. 2. **B**. 4. **C**. 3. **D**. 5.

Câu 15. Cho các hàm số sau:

$(\text{I}): y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1$; $(\text{II}): y = \sin x - 2x$;

$(\text{III}): y = -\sqrt{x^3+2}$; $(\text{IV}): y = \frac{x-2}{1-x}$

Hỏi hàm số nào nghịch biến trên toàn trục số?

A. (I), (II).

B. (I), (II) và (III).

C. (I), (II) và (IV).

D. (II), (III).

Câu 16. Xét các mệnh đề sau:

(I). Hàm số $y = -(x-1)^3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

(II). Hàm số $y = \ln(x-1) - \frac{x}{x-1}$ đồng biến trên tập xác định của nó.

(III). Hàm số $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hỏi có bao nhiêu mệnh đề đúng?

A. 3. **B**. 2. **C**. 1. **D**. 0.

Câu 17. Cho hàm số $y = |x+1|(x-2)$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Câu 18. Cho hàm số $y = x + 3 + 2\sqrt{2-x}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$ và đồng biến trên khoảng $(-2;2)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$ và nghịch biến trên khoảng $(-2;2)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1;2)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

Câu 19. Cho hàm số $y = \cos 2x + \sin 2x.\tan x, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số luôn giảm trên $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

B. Hàm số luôn tăng trên $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

C. Hàm số không đổi trên $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

D. Hàm số luôn giảm trên $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$

Câu 20. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{x-m+2}{x+1}$ giảm trên các khoảng mà nó xác định ?

A. $m < -3$. **B.** $m \le -3$. **C.** $m \le 1$. **D.** $m < 1$.

Câu 21. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số sau luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

$$y = -\frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-3)x - m + 2$$

A. $-3 \le m \le 1$. **B.** $m \le 1$. **C.** $-3 < m < 1$. **D.** $m \le -3; m \ge 1$.

Câu 22. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - (m+1) + 2m - 1}{x - m}$ tăng trên từng khoảng xác định của nó?

A. $m > 1$. **B.** $m \le 1$. **C.** $m < 1$. **D.** $m \ge 1$.

Câu 23. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = f(x) = x + m\cos x$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $|m| \le 1$. **B.** $m > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $|m| \ge 1$. **D.** $m < \dfrac{1}{2}$.

Câu 24. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = (m-3)x - (2m+1)\cos x$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $-4 \le m \le \dfrac{2}{3}$. **B.** $m \ge 2$. **C.** $\begin{cases} m > 3 \\ m \ne 1 \end{cases}$. **D.** $m \le 2$.

Câu 25. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số sau luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$?

$y = 2x^3 - 3(m+2)x^2 + 6(m+1)x - 3m + 5$

A. 0. **B.** -1 . **C.** 2. **D.** 1.

Câu 26. Tìm giá trị nhỏ nhất của tham số m sao cho hàm số $y = \dfrac{x^3}{3} + mx^2 - mx - m$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $m = -5$. **B.** $m = 0$. **C.** $m = -1$. **D.** $m = -6$.

Câu 27. Tìm số nguyên m nhỏ nhất sao cho hàm số $y = \dfrac{(m+3)x - 2}{x + m}$ luôn nghịch biến trên các khoảng xác định của nó?

A. $m = -1$. **B.** $m = -2$. **C.** $m = 0$. **D.** Không có m.

Câu 28. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \dfrac{mx + 4}{x + m}$ giảm trên khoảng $(-\infty; 1)$?

A. $-2 < m < 2$. **B.** $-2 \le m \le -1$. **C.** $-2 < m \le -1$. **D.** $-2 \le m \le 2$.

Câu 29. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

A. $m \le 0$. **B.** $m \le 12$. **C.** $m \ge 0$. **D.** $m \ge 12$.

Câu 30. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = x^4 - 2(m-1)x^2 + m - 2$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$?

A. $m \in [-5; 2)$. B. $m \in (-\infty; 2]$. C. $m \in (2, +\infty)$. D. $m \in (-\infty; -5)$.

Câu 31. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}mx^2 + 2mx - 3m + 4$ nghịch biến trên một đoạn có độ dài là 3?

A. $m=-1; m=9$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=9$. **D.** $m=1; m=-9$.

Câu 32. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{\tan x-2}{\tan x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$?

A. $1\le m<2$. **B.** $m\le 0; 1\le m<2$. **C.** $m\ge 2$. **D.** $m\le 0$.

Câu 33. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{mx^3}{3}+7mx^2+14x-m+2$ giảm trên nửa khoảng $[1;+\infty)$?

A. $\left(-\infty;-\dfrac{14}{15}\right)$. **B.** $\left(-\infty;-\dfrac{14}{15}\right]$. **C.** $\left[-2;-\dfrac{14}{15}\right]$. **D.** $\left[-\dfrac{14}{15};+\infty\right)$.

Câu 34. Tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=-x^4+(2m-3)x^2+m$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$ là $\left(-\infty;\dfrac{p}{q}\right]$, trong đó phân số $\dfrac{p}{q}$ tối giản và $q>0$. Hỏi tổng $p+q$ là?

A. 5. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 3.

Câu 35. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{x^2-2mx+m+2}{x-m}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

A. Hai. **B.** Bốn. **C.** Vô số. **D.** Không có.

Câu 36. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{2x^2+(1-m)x+1+m}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 37. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số α và β sao cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{-x^3}{3}+\dfrac{1}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)x^2-\dfrac{3}{2}x\sin\alpha\cos\alpha-\sqrt{\beta-2}$ luôn giảm trên $\mathbb{R}$?

A. $\dfrac{\pi}{12}+k\pi\le\alpha\le\dfrac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ và $\beta\ge 2$.

B. $\dfrac{\pi}{12}+k\pi\le\alpha\le\dfrac{5\pi}{12}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ và $\beta\ge 2$.

C. $\alpha\le\dfrac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ và $\beta\ge 2$.

D. $\alpha\ge\dfrac{5\pi}{12}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ và $\beta\ge 2$.

Câu 38. Tìm mối liên hệ giữa các tham số a và b sao cho hàm số $y=f(x)=2x+a\sin x+b\cos x$ luôn tăng trên $\mathbb{R}$?

A. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$. **B.** $a+2b=2\sqrt{3}$. **C.** $a^2+b^2\le 4$. **D.** $a+2b\ge\frac{1+\sqrt{2}}{3}$.

Câu 39. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $x^3-3x^2-9x-m=0$ có đúng 1 nghiệm?

A. $-27\le m\le 5$. **B.** $m<-5$ hoặc $m>27$.

C. $m<-27$ hoặc $m>5$. **D.** $-5\le m\le 27$.

Câu 40. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $2\sqrt{x+1}=x+m$ có nghiệm thực?

A. $m\ge 2$. **B.** $m\le 2$. **C.** $m\ge 3$. **D.** $m\le 3$.

Câu 41. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $\sqrt{x^2-4x+5}=m+4x-x^2$ có đúng 2 nghiệm dương?

A. $1\le m\le 3$. **B.** $-3<m<\sqrt{5}$. **C.** $-\sqrt{5}<m<3$. **D.** $-3\le m<3$.

Câu 42. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho mọi nghiệm của bất phương trình: $x^2-3x+2\le 0$ cũng là nghiệm của bất phương trình $mx^2+\left(m+1\right)x+m+1\ge 0$?

A. $m\le -1$. **B.** $m\le -\frac{4}{7}$. **C.** $m\ge -\frac{4}{7}$. **D.** $m\ge -1$.

Câu 43. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình: $\log_3^2 x+\sqrt{\log_3^2 x+1}-2m-1=0$ có ít nhất một nghiệm trên đoạn $\left[1;3^{\sqrt{3}}\right]$?

A. $-1\le m\le 3$. **B.** $0\le m\le 2$. **C.** $0\le m\le 3$. **D.** $-1\le m\le 2$.

Câu 44. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $\sqrt{x^2+mx+2}=2x+1$ có hai nghiệm thực?

A. $m\ge -\frac{7}{2}$. **B.** $m\ge\frac{3}{2}$. **C.** $m\ge\frac{9}{2}$. **D.** $\forall m\in\mathbb{R}$.

Câu 45. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $3\sqrt{x-1}+m\sqrt{x+1}=2\sqrt[4]{x^2-1}$ có hai nghiệm thực?

A. $\frac{1}{3}\le m<1$. **B.** $-1\le m\le\frac{1}{4}$. **C.** $-2<m\le\frac{1}{3}$. **D.** $0\le m<\frac{1}{3}$.

Câu 46. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình

$\sqrt{(1+2x)(3-x)}>m+2x^2-5x-3$ nghiệm đúng với mọi $x\in\left[-\frac{1}{2};3\right]$?

A. $m>1$. **B.** $m>0$. **C.** $m<1$. **D.** $m<0$.

Câu 47. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình

$3\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}\right)-2\sqrt{(1+x)(3-x)}\ge m$ nghiệm đúng với mọi $x\in[-1;3]$?

A. $m\le 6$. **B.** $m\ge 6$. **C.** $m\ge 6\sqrt{2}-4$. **D.** $m\le 6\sqrt{2}-4$.

Câu 48. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}-\sqrt{18+3x-x^2}\le m^2-m+1$ nghiệm đúng $\forall x\in[-3,6]$?

A. $m\ge -1$.
B. $-1\le m\le 0$.
C. $0\le m\le 2$.
D. $m\le -1$ hoặc $m\ge 2$.

Câu 49. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $m.4^x+(m-1).2^{x+2}+m-1>0$ nghiệm đúng $\forall x\in\mathbb{R}$?

A. $m\le 3$. **B.** $m\ge 1$. **C.** $-1\le m\le 4$. **D.** $m\ge 0$.

Câu 50. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình: $-x^3+3mx-2<-\dfrac{1}{x^3}$ nghiệm đúng $\forall x\ge 1$?

A. $m<\dfrac{2}{3}$. **B.** $m\ge\dfrac{2}{3}$. **C.** $m\ge\dfrac{3}{2}$. **D.** $-\dfrac{1}{3}\le m\le\dfrac{3}{2}$.

Câu 51. Tìm giá trị lớn nhất của tham số m sao cho bất phương trình $2^{\cos^2 x}+3^{\sin^2 x}\ge m.3^{\cos^2 x}$ có nghiệm?

A. $m=4$. **B.** $m=8$. **C.** $m=12$. **D.** $m=16$.

Câu 52. Bất phương trình $\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}-\sqrt{4-x}\ge 2\sqrt{3}$ có tập nghiệm là $[a;b]$. Hỏi tổng $a+b$ có giá trị là bao nhiêu?

A. -2. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 53. Bất phương trình $\sqrt{x^2-2x+3}-\sqrt{x^2-6x+11}>\sqrt{3-x}-\sqrt{x-1}$ có tập nghiệm $(a;b]$. Hỏi hiệu $b-a$ có giá trị là bao nhiêu?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** -1.

I – ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	A	D	B	C	D	D	B	A	B	B	A	A	C	A	A	B	C	C	

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
A	B	A	A	A	C	D	C	D	B	A	B	B	C	C	D	B	C	C	B

41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53							
B	C	B	C	D	D	D	D	B	A	A	C	A							