BÀI 3. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D.

+) Số M được gọi là **giá trị lớn nhất (GTLN)** của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu $f(x) \le M$ với mọi $x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = M$.

Kí hiệu: $M = \max\limits_{D} f(x)$

+) Số m được gọi là **giá trị nhỏ nhất (GTNN)** của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu $f(x) \ge m$ với mọi $x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = m$

Kí hiệu: $m = \min\limits_{D} f(x)$

SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA

Số M được gọi là **giá trị lớn nhất (GTLN)** của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu $f(x) \le M$ với mọi $x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = M$.

Kí hiệu: $M = \max\limits_{D} f(x)$

↑

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D

↓

Số m được gọi là **giá trị nhỏ nhất (GTNN)** của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu $f(x) \ge m$ với mọi $x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = m$.

Kí hiệu: $m = \min\limits_{D} f(x)$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Tìm GTLN – GTNN của hàm số *y = f(x)* trên một khoảng

1. Phương pháp giải

Ta thực hiện các bước sau

Bước 1. Tìm tập xác định (nếu đề chưa cho khoảng).

Bước 2. Tính $y' = f'(x)$; tìm các điểm mà đạo hàm bằng không hoặc không xác định.

Bước 3. Lập bảng biến thiên

Bước 4. Kết luận

Lưu ý: Có thể dùng máy tính cầm tay để giải.

Bước 1. Để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên miền (a; b) ta sử dụng máy tính Casio với lệnh MODE 7 (MODE 9 lập bảng giá trị)

Bước 2. Quan sát bảng giá trị máy tính hiển thị, giá trị lớn nhất xuất hiện là max, giá trị nhỏ nhất xuất hiện là min.

- Ta thiết lập miền giá trị của biến x Start a End b Step $\frac{b-a}{19}$ (có thể làm tròn để Step đẹp).

Chú ý: Khi đề bài liên có các yếu tố lượng giác sinx, cosx, tanx… ta chuyển máy tính về chế độ Radian.

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hàm số $f(x) = -\frac{1}{3}x^6 + \frac{2}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^2 + x + 1$.Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\max\limits_{\mathbb{R}} f(x) = \frac{17}{30}$

B. $\max\limits_{\mathbb{R}} f(x) = \frac{47}{30}$

C. $\max\limits_{\mathbb{R}} f(x) = \frac{67}{30}$

D. Hàm số không tồn tại giá trị lớn nhất

Hướng dẫn giải

Chọn B

Tập xác định $D = \mathbb{R}$

Ta có $f'(x) = -2x^5 + 2x^4 - x + 1 = -(x-1)(2x^4+1)$

Khi đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -(x-1)(2x^4+1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{47}{30}$	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy $\max\limits_{\mathbb{R}} f(x)=\dfrac{47}{30}$ tại $x=1$

Bài tập 2. Gọi a là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{6-8x}{x^2+1}$ trên khoảng $(-\infty;1)$. Khi đó giá trị của biểu thức $P=\dfrac{6-8a}{a^2+1}$ bằng

A. $\dfrac{22}{5}$ **B.** $\dfrac{6}{13}$ **C.** $-\dfrac{58}{65}$ **D.** $-\dfrac{74}{101}$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Hàm số liên tục trên khoảng $(-\infty;1)$

Ta có $f'(x)=\dfrac{8x^2-12x-8}{(x^2+1)^2}$

Khi đó $f'(x)=0\Leftrightarrow 8x^2-12x-8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\notin(-\infty;1)\\ x=-\dfrac{1}{2}\in(-\infty;1)\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	8	$\searrow$	-1

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy $\max\limits_{(-\infty;1)} f(x)=8\Rightarrow P=\dfrac{6-8a}{a^2+1}=-\dfrac{58}{65}$

Bài tập 3. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x)=1$

B. $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x)=\dfrac{1}{3}$

C. $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x)=3$

D. Hàm số không có giá trị nhỏ nhất

Hướng dẫn giải

Chọn B

Tập xác định $D=\mathbb{R}$

Ta có

$$y=f(x)=1-\frac{2x}{x^2+x+1}\Rightarrow y'=-\frac{2(x^2+x+1)-2x(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}=\frac{2x^2-2}{(x^2+x+1)^2}$$

Do đó $y'=0\Leftrightarrow 2x^2-2=0\Leftrightarrow x=\pm1$

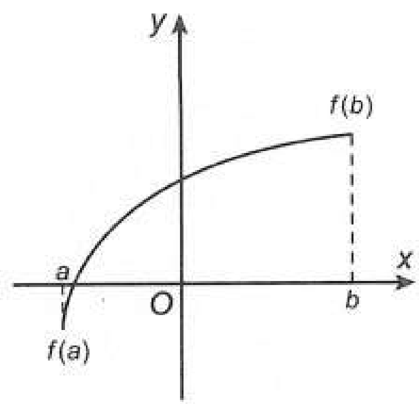
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$\frac{1}{3}$	$\nearrow$	1

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy $\min\limits_{\mathbb{R}} f\left(x\right) = \frac{1}{3}$ tại $x = 1$

Dạng 2: Tìm GTLN và GTNN của hàm số trên một đoạn

1. Phương pháp giải



Bước 1. Tính $f'\left(x\right)$

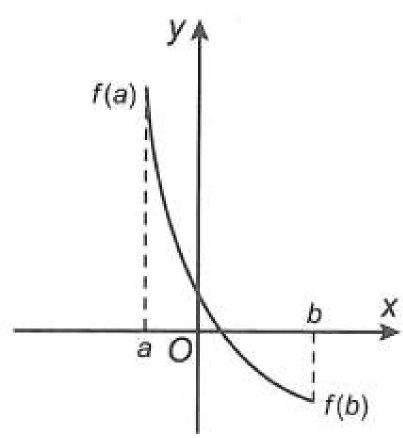
Bước 2. Tìm các điểm $x_i \in \left(a; b\right)$ mà tại đó $f'\left(x_i\right) = 0$ hoặc $f'\left(x_i\right)$ không xác định

Bước 3. Tính $f\left(a\right)$, $f\left(x_i\right)$, $f\left(b\right)$

Bước 4. Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số trên.

Khi đó $M = \max\limits_{[a;\, b]} f\left(x\right)$ và $m = \min\limits_{[a;\, b]} f\left(x\right)$

Chú ý:



+) Hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên đoạn [a; b] thì $\begin{cases}\max f\left(x\right)=f\left(b\right)\\ \min f\left(x\right)=f\left(a\right)\end{cases}$

+) Hàm số $y=f\left(x\right)$ nghịch biến trên đoạn [a; b] thì $\begin{cases}\max f\left(x\right)=f\left(a\right)\\ \min f\left(x\right)=f\left(b\right)\end{cases}$

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$. Giá trị của $\left(\min\limits_{[2;\,3]} y\right)^2+\left(\max\limits_{[2;\,3]} y\right)^2$ bằng

A. 16 **B.** $\dfrac{45}{4}$ **C.** $\dfrac{25}{4}$ **D.** $\dfrac{89}{4}$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $y'=\dfrac{-3}{\left(x-1\right)^2}<0,\ \forall x\neq 1$, do đó hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty;\,1\right);\,\left(1;\,+\infty\right)\Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên [2; 3].

Do đó $\min\limits_{[2;\,3]} y=y\left(3\right)=\dfrac{5}{2};\ \max\limits_{[2;\,3]} y=y\left(2\right)=4$

Vậy $\left(\min\limits_{[2;\,3]} y\right)^2+\left(\max\limits_{[2;\,3]} y\right)^2=\left(\dfrac{5}{2}\right)^2+4^2=\dfrac{89}{4}$

Bài tập 2. Gọi *M, m* lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=x+\sqrt{4-x^2}$

Giá trị của biểu thức $P=M+m$ bằng

A. $2\left(\sqrt{2}-1\right)$ **B.** $2\left(\sqrt{2}+1\right)$ **C.** $\sqrt{2}+1$ **D.** $\sqrt{2}-1$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Tập xác định $D=\left[-2;\,2\right]$

Ta có $y'=1-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}=\dfrac{\sqrt{4-x^2}-x}{\sqrt{4-x^2}},\ x\in\left(-2;\,2\right)$

$y'=0\Leftrightarrow\sqrt{4-x^2}=x\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\ x=\pm 2\in\left(-2;\,2\right)\end{cases}$

$y\left(\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2};\ y\left(-\sqrt{2}\right)=0;\ y\left(2\right)=2;\ y\left(-2\right)=-2$

Vậy $M=2\sqrt{2},\ m=-2\Rightarrow P=2\sqrt{2}-2=2\left(\sqrt{2}-1\right)$

Bài tập 3. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2x^3-3x^2+m$ trên đoạn [0; 5] bằng 5 khi *m* bằng

A. 6 **B.** 10 **C.** 7 **D.** 5

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Hàm số xác định và liên tục trên $D=[0;\,5]$

Ta có $y'=0\Leftrightarrow 6x^2-6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\in D\\ x=1\in D\end{array}\right.$

$f(0)=m;\ f(1)=m-1;\ f(5)=175+m$

Dễ thấy $f(5)>f(0)>f(1),\ \forall m\in\mathbb{R}$ nên $\min\limits_{[0;\,5]}f(x)=f(1)=m-1$

Theo đề bài $\min\limits_{[0;\,5]}f(x)=5\Leftrightarrow m-1=5\Leftrightarrow m=6$

Bài tập 4. Gọi A, B là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x+m^2+m}{x-1}$ trên đoạn [2; 3]. Tất cả các giá trị thực của tham số *m* để $A+B=\dfrac{13}{2}$ là

A. $m=1;\ m=-2$ **B.** $m=-2$

C. $m=\pm 2$ **D.** $m=-1;\ m=2$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Hàm số đã cho liên tục trên đoạn [2; 3]

Ta có $y'=\dfrac{-\left(m^2+m+1\right)}{(x-1)^2}<0,\ \forall m$

$\Rightarrow A=y(3)=\dfrac{m^2+m+3}{2};\ B=y(2)=m^2+m+2$

Do đó $A+B=\dfrac{13}{2}\Leftrightarrow\dfrac{m^2+m+3}{2}+m^2+m+2=\dfrac{13}{2}$

$\Leftrightarrow 3m^2+m-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=-2\end{array}\right.$

Bài tập 5. Biết hàm số $y=x^3+3mx^2+3(2m-1)x+1$ (với *m* là tham số) trên đoạn [-2; 0] đạt giá trị lớn nhất bằng 6. Các giá trị của tham số *m* là

A. $m=1$ **B.** $m=0$ **C.** $m=3$ **D.** $m=-1$

Hướng dẫn giải

Chọn D

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=1-2m\end{array}\right.$

Vì $y(-2)=-1;\ y(0)=1$ và theo bài ra $\max\limits_{[-2;\,0]}y=6$ nên giá trị lớn nhất không đạt tại $x=-2;\ x=0$. Do đó giá trị lớn nhất đạt tại $y(-1)$ hoặc $y(1-2m)$.

Ta có $y(-1)=-3m+3,\ y(1-2m)=(1-2m)^2(m-2)+1$

- *Trường hợp 1:* Xét $-3m+3=6 \Leftrightarrow m=-1$

Thử lại với $m=-1$, ta có $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \in [-2;\, 0] \\ x=3 \notin [-2;\, 0] \end{array}\right.$ nên $m=-1$ là một giá trị cần tìm.

- *Trường hợp 2:* Xét $\begin{cases} (1-2m)^2(m-2)+1=6 \\ -2<1-2m<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-2m)^2(m-2)=5 \quad (1) \\ \dfrac{1}{2}<m<\dfrac{3}{2} \end{cases}$

Vì $\dfrac{1}{2}<m<\dfrac{3}{2} \Rightarrow m-2<0 \Rightarrow (1-2m)^2(m-2)<0$ nên (1) vô nghiệm

Dạng 3: Tìm GTLN – GTNN của hàm số *y* = |*f(x)*| trên đoạn [a; b]

1. Phương pháp giải

Thực hiện theo các bước sau

Bước 1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;\, b]$, giả sử thứ tự là *M, m*.

Bước 2.

+) Tìm $\max\limits_{[a;\, b]} y = \max\{|M|;\, |m|\}$

+) Tìm $\min\limits_{[a;\, b]} y$

- *Trường hợp 1:* $M.m<0 \Rightarrow \min\limits_{[a;\, b]} y = 0$

- *Trường hợp 2:* $m \geq 0 \Rightarrow \min\limits_{[a;\, b]} y = m$

- *Trường hợp 3:* $M \leq 0 \Rightarrow \min\limits_{[a;\, b]} y = |M| = -M$

Bước 3. Kết luận.

*** Tìm tham số để GTLN của hàm số *y* = |*f(x)*| trên đoạn [α, β] bằng *k***

Thực hiện theo các bước sau

Bước 1. Tìm $\max\limits_{[\alpha;\, \beta]} f(x) = \max\limits_{[\alpha;\, \beta]}\{|A|;\, |B|\}$

Bước 2. Xét các trường hợp

+) $|A|=k$ tìm *m,* thử lại các giá trị *m* đó

+) $|B|=k$ tìm *m,* thử lại các giá trị *m* đó

2. Bài tập

Bài tập 1. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^3-9x^2+24x-68\right|$ trên đoạn [-1; 4] bằng

A. 48 **B.** 52 **C.** -102 **D.** 0

Hướng dẫn giải

Chọn A

Bảng biến thiên của hàm số $y=x^3-9x^2+24x-68$ trên $[-1;\, 4]$

x	-1		2		4
y'		$+$	0	$-$	
y			-48		
		$\nearrow$		$\searrow$	-52
	-102				

Suy ra bảng biến thiên của hàm số $y=\left|x^3-9x^2+24x-68\right|$ trên đoạn $\left[-1;\,4\right]$ là

x	-1		2		4
y'		$-$	0	$+$	
y	102				
		$\searrow$		$\nearrow$	52
			48		

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^3-9x^2+24x-68\right|$ trên đoạn $\left[-1;\,4\right]$ bằng 48.

Cách khác: Theo trường hợp 3 thì $M=-48<0 \Rightarrow \min y=48$

Bài tập 2: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\dfrac{x^2+mx+m}{x+1}\right|$ trên đoạn [1; 2] bằng 2.

Số phần tử của tập S là

A. 3 **B.** 1 **C.** 4 **D.** 2

Hướng dẫn giải

Chọn D

Xét hàm số $y=f\left(x\right)=\dfrac{x^2+mx+m}{x+1}$

Ta có $y'=\dfrac{x^2+2x}{\left(x+1\right)^2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\notin\left[1;\,2\right] \\ x=-2\notin\left[1;\,2\right]\end{array}\right.$

Mặt khác $f\left(1\right)=\dfrac{2m+1}{2}$; $f\left(2\right)=\dfrac{3m+4}{3}$

Do đó $\max\limits_{[1;\,2]} y=\max\left\{\left|\dfrac{2m+1}{2}\right|;\left|\dfrac{3m+4}{3}\right|\right\}$

- *Trường hợp 1:*

$\max\limits_{[1;\,2]} y=\left|\dfrac{2m+1}{2}\right|=2 \rightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{3}{2} \\ m=-\dfrac{5}{2}\end{array}\right.$

+) Với $m=\dfrac{3}{2} \Rightarrow \left|\dfrac{3m+4}{3}\right|=\dfrac{17}{6}>2$ (loại)

+) Với $m=-\frac{5}{2}\Rightarrow\left|\frac{3m+4}{3}\right|=\frac{7}{6}<2$ (thỏa mãn)

- *Trường hợp 2:*

$$\max_{[1;\,2]} y=\left|\frac{3m+4}{3}\right|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=\frac{2}{3}\\ m=-\frac{10}{3}\end{array}\right.$$

+) Với $m=\frac{2}{3}\Rightarrow\left|\frac{2m+1}{2}\right|=\frac{7}{6}<2$ (thỏa mãn)

+) Với $m=-\frac{10}{3}\Rightarrow\left|\frac{2m+1}{2}\right|=\frac{17}{6}>2$ (loại)

Vậy có hai giá trị của *m* thỏa mãn.

Bài tập 3. Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số *m* sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\left|\frac{1}{4}x^4-14x^2+48x+m-30\right|$ trên đoạn [0; 2] không vượt quá 30. Tổng các phần tử của S bằng

A. 108 **B.** 120 **C.** 210 **D.** 136

Hướng dẫn giải

Chọn D

Xét hàm số $g(x)=\frac{1}{4}x^4-14x^2+48x+m-30$ trên đoạn [0; 2]

Ta có $g'(x)=x^3-28x+48\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-6\notin[0;\,2]\\ x=2\in[0;\,2]\\ x=4\notin[0;\,2]\end{array}\right.$

Để $\max\limits_{[0;\,2]}|g(x)|\le 30\Leftrightarrow\begin{cases}|g(0)|\le 30\\ |g(2)|\le 30\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|m-30|\le 30\\ |m+14|\le 30\end{cases}\Leftrightarrow 0\le m\le 16$

$\Rightarrow m\in\{0;1;\,2;...;\,15;\,16\}$

Tổng các phần tử của S là 136.

Bài tập 4. Biết giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\sqrt{4-x^2}+x-\frac{1}{2}\right|+m$ bằng 18.

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $0<m<5$ **B.** $10<m<15$

C. $5<m<10$ **D.** $15<m<20$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Xét hàm số $g(x)=\sqrt{4-x^2}+x-\frac{1}{2}$ liên tục trên tập xác định [-2; 2]

Ta có $g'(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}+1 \Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}+1=0,\ x\in(-2;\ 2)$

$\Leftrightarrow \sqrt{4-x^2}=x \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 4-x^2=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=\sqrt{2}\in(-2;\ 2)$

$g(-2)=-\dfrac{5}{2};\ g(\sqrt{2})=\dfrac{-1+4\sqrt{2}}{2};\ g(2)=\dfrac{3}{2}$

Do đó $\max\limits_{[-2;\ 2]}|g(x)|=\dfrac{5}{2}$ khi $x=-2$, suy ra giá trị lớn nhất của hàm số bằng $\dfrac{5}{2}+m$

Theo bài ra $\dfrac{5}{2}+m=18 \Leftrightarrow m=15,5$. Vậy $15<m<20$

Dạng 4: Tìm điều kiện tham số để GTLN của hàm số *y = |f(x) + g(m)|* trên đoạn [a; b] đạt GTNN

1. Phương pháp giải

Thực hiện các bước sau

Bước 1. Tìm $\alpha=\max\limits_{[a;\ b]} f(x);\ \beta=\min\limits_{[a;\ b]} f(x)$

Bước 2. Gọi M là giá trị lớn nhất của

$y=|f(x)+g(m)|$ thì

$M=\max\{|\alpha+g(m)|;\ |\beta+g(m)|\}\ge \dfrac{|\alpha+g(m)|+|\beta+g(m)|}{2}=\dfrac{|\alpha+g(m)|+|-\beta-g(m)|}{2}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $|\alpha+g(m)|=|\beta+g(m)|$

Áp dụng bất đẳng thức $\dfrac{|\alpha+g(m)|+|-\beta-g(m)|}{2}\ge \dfrac{|\alpha+g(m)-\beta-g(m)|}{2}=\dfrac{|\alpha-\beta|}{2}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $[\alpha+g(m)][-\beta-g(m)]\ge 0$

Bước 3. Kết luận $\min M=\dfrac{|\alpha-\beta|}{2}$ khi $g(m)=\dfrac{-\alpha-\beta}{2}$

2. Bài tập

Bài tập 1: Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $y=|x^2+2x+m-4|$ trên đoạn [-2; 1] đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị của tham số *m* bằng

A. 1 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $f(x)=x^2+2x$

Ta có $f'(x)=2x+2;\ f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1\in[-2;\ 1]$

$f\left(-2\right)=0;\ f\left(1\right)=3;\ f\left(-1\right)=-1$

Do đó $\max\limits_{[-2;\,1]} f\left(x\right)=3;\ \min\limits_{[-2;\,1]} f\left(x\right)=-1$

Suy ra $\max\limits_{[-2;\,1]} y=\max\left\{\left|m-5\right|;\left|m-1\right|\right\}$

$\geq \dfrac{\left|m-5\right|+\left|m-1\right|}{2}\geq \dfrac{\left|5-m+m-1\right|}{2}=2$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$\begin{cases}\left|m-5\right|=\left|m-1\right| \\ \left(5-m\right)\left(m-1\right)\geq 0\end{cases}\Rightarrow m=3$ (thỏa mãn)

Bài tập 2: Để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\sqrt{2x-x^2}-3m+4\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì m bằng

A. $m=\dfrac{3}{2}$ **B.** $m=\dfrac{5}{3}$ **C.** $m=\dfrac{4}{3}$ **D.** $m=\dfrac{1}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Tập xác định $D=\left[0;\,2\right]$

Đặt $f\left(x\right)=\sqrt{2x-x^2},\ x\in D$.

Ta có $f'\left(x\right)=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\Rightarrow f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=1$

$f\left(0\right)=0;\ f\left(2\right)=0;\ f\left(1\right)=1$

Suy ra $P=\max\limits_{D} y=\max\left\{\left|3m-4\right|;\left|3m-5\right|\right\}\geq \dfrac{\left|3m-4\right|+\left|3m-5\right|}{2}\geq \dfrac{\left|5-3m+3m-4\right|}{2}=\dfrac{1}{2}$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}\left|3m-4\right|=\left|3m-5\right| \\ \left(5-3m\right)\left(3m-4\right)\geq 0\end{cases}\Rightarrow m=\dfrac{3}{2}$ (thỏa mãn)

Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số là nhỏ nhất khi $m=\dfrac{3}{2}$

Bài tập 3. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f\left(x,\,m\right)=\left|x^2-2x+5\right|+mx$ đạt giá trị lớn nhất bằng

A. 2 **B.** 5 **C.** 8 **D.** 9

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $\min f\left(x,\,m\right)\leq f\left(0,\,m\right)=5,\ \forall m\in\mathbb{R}$

Xét $m=2$ ta có $f\left(x,\,2\right)=\left|x^2-2x+5\right|+2x\geq x^2-2x+5+2x\geq 5,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Dấu bằng xảy ra tại $x=0$. Suy ra $\min f\left(x,\,2\right)=5,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Do đó $\begin{cases} \min f(x, m) \le 5, \forall m \in \mathbb{R} \\ \min f(x, 2) = 5, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \max(\min f(x, m)) = 5$, đạt được khi $m = 2$

Tổng quát: $y = |ax^2 + bx + c| + mx$

Trường hợp 1: $a.c > 0 \Rightarrow \max(\min y) = c$

Đạt được khi $m = -b$

Bài tập 4. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x, m) = |x^2 - 4x - 7| + mx$ đạt giá trị lớn nhất bằng

A. 7 **B.** -7 **C.** 0 **D.** 4

Hướng dẫn giải

Chọn C

Phương trình $x^2 - 4x - 7 = 0$ luôn có hai nghiệm trái dấu $x_1 < 0 < x_2$

Trường hợp 1: Nếu $m \ge 0$

Ta có $\min f(x, m) \le f(x, m) = mx_1 \le 0, \forall m \in \mathbb{R}$

Xét $m = 0$ ta có $f(x, 0) = |x^2 - 4x - 7| \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Dấu bằng xảy ra tại $x = x_{1,2}$.

Suy ra $\min f(x, 0) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Do đó $\begin{cases} \min f(x, m) \le 0, \forall m \in \mathbb{R} \\ \min f(x, 0) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \max(\min f(x, m)) = 0$ khi $m = 0$

Trường hợp 2: Nếu $m < 0$

Ta có $\min f(x, m) \le f(x_2, m) = mx_2 < 0, \forall m \in \mathbb{R} \Rightarrow \max(\min f(x,m)) < 0$

So sánh cả hai trường hợp thì $\max(\min f(x,m)) = 0$ khi $m = 0$

Trường hợp 2: $a.c < 0 \Rightarrow \max(\min y) = 0$ *Đạt được khi* $m = 0$

Dạng 5: TÌM GTLN-GTNN khi cho đồ thị - bảng biến thiên

Bài tập 1. Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên dưới

x	$-\infty$		-4		0		8		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	$f(-4)$	↗	9	↘	$f(8)$	↗	$+\infty$

Biết $f(-4) > f(8)$, khi đó giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $\mathbb{R}$ bằng

A. 9 **B.** $f(-4)$ **C.** $f(8)$ **D.** -4

Hướng dẫn giải

Chọn C

Từ bảng biến thiên ta có $f(x) \geq f(-4), \forall x \in (-\infty; 0]$ và $f(x) \geq f(8), \forall x \in (0; +\infty)$.

Mặt khác $f(-4) > f(8)$ suy ra $\forall x \in (-\infty; +\infty)$ thì $f(x) \geq f(8)$

Vậy $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x) = f(8)$

Bài tập 2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập hợp $D = (-\infty; -1] \cup \left[1; \frac{3}{2}\right]$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
y'		$+$				$-$			
y	-1	$\nearrow$	0		0	$\searrow$	$-\sqrt{5}$		

Khẳng định đúng là

A. $\max\limits_{D} f(x) = 0$; không tồn tại $\min\limits_{D} f(x)$

B. $\max\limits_{D} f(x) = 0$; $\min\limits_{D} f(x) = -\sqrt{5}$

C. $\max\limits_{D} f(x) = 0$; $\min\limits_{D} f(x) = -1$

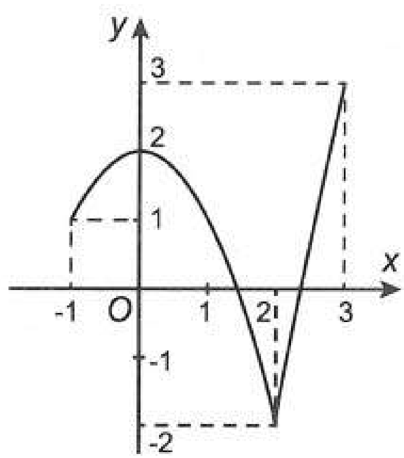
D. $\min\limits_{D} f(x) = 0$; không tồn tại $\max\limits_{D} f(x)$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Dựa vào bảng biến thiên thì $\max\limits_{D} f(x) = f(\pm 1) = 0; \min\limits_{D} f(x) = f\left(\frac{3}{2}\right) = -\sqrt{5}$

Bài tập 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 3]$. Giá trị của $M - m$ bằng

A. 1 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

Hướng dẫn giải

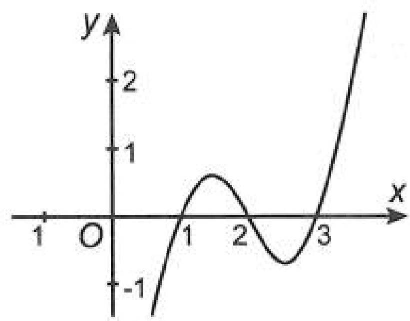
Chọn D

Dựa vào đồ thị suy ra

$M = f(3) = 3;\ m = f(2) = -2$

Vậy $M - m = 5$

Bài tập 4. Cho đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên khoảng $[1;\ 3]$ tại x_0. Khi đó giá trị của $x_0^2 - 2x_0 + 2019$ bằng bao nhiêu?

A. 2018 **B.** 2019 **C.** 2021 **D.** 2022

Hướng dẫn giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên như sau

x	1		2		3
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	$f(1)$	↗	$f(2)$	↘	$f(3)$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên khoảng $[1;\ 3]$ tại $x_0 = 2$.

Vậy $x_0^2 - 2x_0 + 2019 = 2019$

Dạng 6. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số lượng giác

1. Phương pháp giải

Ghi nhớ: Điều kiện của các ẩn phụ

- Nếu $\left[\begin{array}{l} t = \sin x \\ t = \cos x \end{array}\right. \Rightarrow -1 \le t \le 1$

- Nếu $\left[\begin{array}{l} t = |\cos x| \\ t = \cos^2 x \end{array}\right. \Rightarrow 0 \le t \le 1$

- Nếu $\left[\begin{array}{l} t=|\sin x| \\ t=\sin^2 x \end{array}\right. \Rightarrow 0 \le t \le 1$

- Nếu $t=\sin x \pm \cos x=\sqrt{2}.sni\left(x \pm \dfrac{\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow -\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$

Bước 1. Đặt ẩn phụ và tìm điều kiện cho ẩn phụ

Bước 2. Giải bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số theo ẩn phụ

Bước 3. Kết luận (Chọn đáp án)

2. Bài tập

Bài tập 1. Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=2\cos 2x+2\sin x$ là

A. $M=\dfrac{9}{4};\ m=-4$ **B.** $M=4;\ m=0$

C. $M=0;\ m=-\dfrac{9}{4}$ **D.** $M=4;\ m=-\dfrac{9}{4}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $y=2\cos 2x+2\sin x=2\left(1-2\sin^2 x\right)+2\sin x=-4\sin^2 x+2\sin x+2$

Đặt $t=\sin x,\ t\in[-1;\ 1]$, ta được $y=-4t^2+2t+2$

Ta có $y'=0 \Leftrightarrow -8t+2=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{1}{4}\in(-1;\ 1)$

Vì $\begin{cases} y(-1)=-4 \\ y(1)=0 \\ y\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{9}{4} \end{cases}$ nên $M=\dfrac{9}{4};\ m=-4$

Bài tập 2. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{\cos^2 x+|\cos x|+1}{|\cos x|+1}$ bằng

A. $\dfrac{3}{2}$ **B.** $\dfrac{5}{2}$ **C.** $\dfrac{7}{2}$ **D.** 3

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $t=|\cos x| \Rightarrow 0 \le t \le 1$, ta được $y=f(t)=\dfrac{t^2+t+1}{t+1}$ với $0 \le t \le 1$

Vì $f'(t)=\dfrac{t^2+2t}{(t+1)^2} \ge 0,\ \forall t\in[0;\ 1]$ nên $\min\limits_{[0;\ 1]} f(t)=f(0)=1;\ \max\limits_{[0;\ 1]} f(t)=f(1)=\dfrac{3}{2}$

Suy ra tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho bằng

$\min\limits_{[0;\,1]} f(t) + \max\limits_{[0;\,1]} f(t) = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$

Bài tập 3. Giá trị lớn nhất *M* của hàm số $y = \cos^4 x + \sqrt{3}\sin^2 x + 2$ là

A. $M = 2 + \sqrt{3}$ **B.** $M = 3$

C. $M = \frac{5}{4} + \sqrt{3}$ **D.** $M = 3 + \sqrt{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đặt $t = \cos^2 x \Rightarrow 0 \le t \le 1$, ta được $y = t^2 + \sqrt{3}(1-t) + 2$ với $t \in [0;\,1]$

Ta có $y' = 2t - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\sqrt{3}}{2} \in (0;\,1)$

Vì $y(0) = 2 + \sqrt{3};\ y\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5}{4} + \sqrt{3};\ y(1) = 3$ nên $M = 2 + \sqrt{3}$

Bài tập 4. Cho hàm số $y = \frac{\left|\sin^2 x - (m+1)\sin x + 2m + 2\right|}{\sin x - 2}$ (với *m* là tham số thực).

Giá trị lớn nhất của hàm số đạt giá trị nhỏ nhất khi m bằng

A. $-\frac{3}{2}$ **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{3}{2}$ **D.** $-\frac{1}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Xét $f(x) = \frac{\sin^2 x - \sin x + 2}{\sin x - 2}$

Đặt $t = \sin x \Rightarrow -1 \le t \le 1$, ta được $f(t) = \frac{t^2 - t + 2}{t - 2}$ với $t \in [-1;\,1]$

Ta có $f'(t) = \frac{t^2 - 4t}{(t-2)^2} = 0 \Rightarrow t^2 - 4t = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \in (-1;\,1) \\ t = 4 \notin (-1;\,1) \end{array}\right.$

Vì $f(-1) = \frac{-4}{3};\ f(1) = -2;\ f(0) = -1$ nên $\max\limits_{[-1;\,1]} f(t) = -1$ và $\min\limits_{[-1;\,1]} f(t) = -2$

Hay $-2 \le \frac{\sin^2 x - \sin x + 2}{\sin x - 2} \le -1,\ \forall x$

Mặt khác $y = \left|\frac{\sin^2 x - \sin x + 2}{\sin x - 2} - m\right| = \left|f(x) - m\right|,\ \forall -2 \le f(x) \le -1$

Do đó $\max\limits_{\mathbb{R}} y = \max\limits_{[-2;\,-1]} \left|f(x) - m\right| = \max\left\{|m+2|,\ |m+1|\right\} = \max\left\{|m+2|,\ |-m-1|\right\}$

$\Rightarrow \max y \ge \frac{|m+2| + |-m-1|}{2} \ge \frac{\left|(m+2) + (-m-1)\right|}{2} = \frac{1}{2}$

Dấu bằng đạt được khi $\begin{cases} |m+2| = |-m-1| \\ (m+2)(-m-1) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\dfrac{3}{2}$

Bài tập 5. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |1 + 2\cos x| + |1 + 2\sin x|$ bằng

A. $\sqrt{2} - 1$ **B.** $\sqrt{3} - 1$ **C.** 1 **D.** $2 - \sqrt{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn B

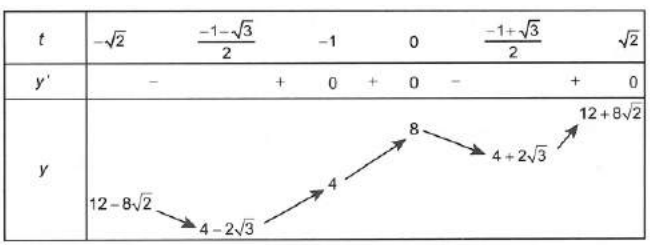
Ta có $P^2 = 6 + 4(\sin x + \cos x) + 2|1 + 2(\sin x + \cos x) + 4\sin x \cos x|$

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}.\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ với $|t| \le \sqrt{2} \Rightarrow \sin x \cos x = \dfrac{t^2 - 1}{2}$

Xét $y = P^2 = 6 + 4t + 2|2t^2 + 2t - 1| = \begin{cases} 4t^2 + 8t + 4 & khi\ t \le \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2};\ t \ge \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ -4t^2 + 8 & khi\ \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} < t < \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow y' = \begin{cases} 8t + 8 & khi\ t < \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2};\ t > \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ -8t & khi\ \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} < t < \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên, suy ra $\min\limits_{[-\sqrt{2};\ \sqrt{2}]} f(t) = 4 - 2\sqrt{3} = \left(\sqrt{3} - 1\right)^2$

$\Rightarrow \min P = \sqrt{3} - 1$

Bài tập 6. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \sin x + \cos 2x$ trên đoạn $[0;\ \pi]$ là

A. $\max\limits_{[0;\ \pi]} y = \dfrac{5}{4}$ **B.** $\max\limits_{[0;\ \pi]} y = 1$ **C.** $\max\limits_{[0;\ \pi]} y = 2$ **D.** $\max\limits_{[0;\ \pi]} y = \dfrac{9}{8}$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt $t = \sin x \Rightarrow \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 1 - 2t^2$, với $x \in [0;\ \pi] \Rightarrow t \in [0;\ 1]$

Ta được $f(t) = -2t^2 + t + 1$ với $t \in [0;\ 1]$

Ta có $f'(t) = -4t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{4} \in (0;\ 1)$

Do $f(0)=1;\ f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{9}{8};\ f(1)=0$ nên $\max\limits_{[0;\,1]} f(t)=\frac{9}{8}$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là $\max\limits_{[0;\,\pi]} y=\frac{9}{8}$

Dạng 7. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số khác

Bài tập 1. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=4\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^3+\frac{6x}{x^2+1}-1$ bằng

A. $\frac{5}{2}$ **B.** -5 **C.** $-\frac{9}{2}$ **D.** 3

Hướng dẫn giải

Chọn A

Do $x^2+1\ge 2|x| \Rightarrow \frac{|x|}{x^2+1}\le\frac{1}{2}$

Đặt $t=\frac{x}{x^2+1}\Rightarrow |t|\le\frac{1}{2}$

Khi đó $y=4t^3+6t-1$ với $t\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$

Vì $y'=12t^2+6>0,\ \forall t$ nên hàm số đồng biến trên $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$

Do đó $\max\limits_{\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]} y=y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2}$

Bài tập 2. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{-x+9}$ lần lượt là

A. $2;\ \sqrt{2}$ **B.** $4;\ 2$ **C.** $4;\ \sqrt{2}$ **D.** $4;2\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Tập xác định $D=[1;\,9]$

Ta có $y'=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}-\frac{1}{2\sqrt{-x+9}}=0\Rightarrow\sqrt{x-1}=\sqrt{-x+9}\Rightarrow x=5\in(1;\,9)$

Vì $y(1)=y(9)=2\sqrt{2};\ y(5)=4$ nên $\max y=4;\ \min y=2\sqrt{2}$.

Nhận xét: *với hàm số* $y=\sqrt{x+a}+\sqrt{-x+b}$ $(-a\le x\le b;\ a+b\ge 0)$ *thì*

$$\begin{cases} y\ge 0\\ y^2=a+b+2\sqrt{x+a}.\sqrt{-x+b}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} y^2\ge a+b\\ y^2\le a+b+(x+a)+(-x+b)=2(a+b)\end{cases}$$

Suy ra $\sqrt{a+b}\le y\le 2\sqrt{a+b}$ *dấu bằng luôn xảy ra.*

Bài tập 3. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{x+1}-\sqrt{3-x}-\sqrt{(x+1)(3-x)}$ bằng

A. $\frac{-5}{2}$ **B.** -2 **C.** -4 **D.** 2

Hướng dẫn giải

Chọn A

Tập xác định của hàm số là $D=[-1;\,3]$

Đặt $t=\sqrt{x+1}-\sqrt{3-x}\Rightarrow t^2=4-2\sqrt{(x+1)(3-x)}\Rightarrow\sqrt{(x+1)(3-x)}=\frac{4-t^2}{2}$

Do $t^2=4-2\sqrt{(x+1)(3-x)}\le 4,\ \forall x\in[-1;\,3]$, từ đó suy ra $-2\le t\le 2$

Bài toán quy về tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(t)=\frac{t^2}{2}+t-2$ trên đoạn $[-2;\,2]$.

Ta có $g'(t)=t+1=0\Leftrightarrow t=-1\in(-2;\,2)$

Lại có $g(-2)=-2;\ g(2)=2;\ g(-1)=\frac{-5}{2}$

Suy ra giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{-5}{2}$

Nhận xét: Với hàm số $y=\sqrt{x+a}-\sqrt{-x+b}\ \left(-a\le x\le b;\ a+b\ge 0\right)$ *thì*

$y^2=a+b-2\sqrt{x+a}.\sqrt{-x+b}\le a+b$

$\Rightarrow -\sqrt{a+b}\le y\le\sqrt{a+b}$

Dạng 8. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức nhiều biến

Bài tập 1. Cho biểu thức $P=\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$ với $x^2+y^2\ne 0$. Giá trị nhỏ nhất của P bằng

A. 3. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** 1. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

- Nếu $y=0$ thì P =1. (1)
- Nếu $y\ne 0$ thì $P=\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}=\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2+\left(\frac{x}{y}\right)+1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2-\left(\frac{x}{y}\right)+1}$.

Đặt $t=\frac{x}{y}$, khi đó $P=f(t)=\frac{t^2+t+1}{t^2-t+1}$.

$f'(t)=\dfrac{-2t^2+2}{(t^2-t+1)^2}=0\Leftrightarrow -2t^2+2=0\Leftrightarrow t=\pm 1.$

Bảng biến thiên

t	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	1	$\searrow$	$\dfrac{1}{3}$	$\nearrow$	3	$\searrow$	1

Dựa vào bảng biến thiên ta có $P=f(t)\geq \dfrac{1}{3}.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $P=f(t)\geq \dfrac{1}{3}\Rightarrow \min P=\dfrac{1}{3}.$

Bài tập 2. Cho hai số thực x,y thỏa mãn $x\geq 0; y\geq 0$ và $x+y=1$. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{x}{y+1}+\dfrac{y}{x+1}$ lần lượt là

A. $\dfrac{1}{2}$ và 1. **B.** 0 và 1. **C.** $\dfrac{2}{3}$ và 1. **D.** 1 và 2.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $P=\dfrac{x}{y+1}+\dfrac{y}{x+1}=\dfrac{x(x+1)+y(y+1)}{(x+1)(y+1)}=\dfrac{(x+y)^2-2xy+1}{xy+x+y+1}=\dfrac{2-2xy}{2+xy}.$

Đặt $t=xy$ ta được $P=\dfrac{2-2t}{2+t}.$

Vì $x\geq 0; y\geq 0\Rightarrow t\geq 0.$

Mặt khác $1=x+y\geq 2\sqrt{xy}\Leftrightarrow xy\leq \dfrac{1}{4}\Rightarrow t\leq \dfrac{1}{4}.$

Khi đó, bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(t)=\dfrac{2-2t}{2+t}$ trên $\left[0;\dfrac{1}{4}\right].$

Xét hàm số $g(t)=\dfrac{2-2t}{2+t}$ xác định và liên tục trên $\left[0;\dfrac{1}{4}\right].$

Ta có $g'(t)=\dfrac{-6}{(2+t)^2}<0$ với $\forall t\in\left(0;\dfrac{1}{4}\right)$

$\Rightarrow$ hàm số $g(t)$ nghịch biến trên đoạn $\left[0;\dfrac{1}{4}\right].$

Do đó $\begin{cases} \min\limits_{\left[0;\frac{1}{4}\right]} g(t) = g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{2}{3} \\ \max\limits_{\left[0;\frac{1}{4}\right]} g(t) = g(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \min P = \frac{2}{3} \\ \max P = 1 \end{cases}.$

Bài tập 3. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $(x-3)^2+(y-1)^2=5$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{3y^2+4xy+7x+4y-1}{x+2y+1}$ bằng

A. 3. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\frac{114}{11}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$(x-3)^2+(y-1)^2=5 \Rightarrow x^2+y^2-6x-2y+5=0.$

$P=\frac{(3y^2+4xy+7x+4y-1)+(x^2+y^2-6x-2y+5)}{x+2y+1}$

$=\frac{4y^2+4xy+x^2+x+2y+4}{x+2y+1}=\frac{(2y+x)^2+(x+2y)+4}{x+2y+1}$

Đặt $t=x+2y$.

$(1^2+2^2)\left[(x-3)^2+(y-1)^2\right] \ge \left[(x-3)+(2y-2)\right]^2$

$\Rightarrow (x+2y-5)^2 \le 25 \Leftrightarrow 0 \le x+2y \le 10.$

Ta được $P=f(t)=\frac{t^2+t+4}{t+1}=t+\frac{4}{t+1}, 0 \le t \le 10.$

Xét $f'(t)=1-\frac{4}{(t+1)^2}=0 \Rightarrow (t+1)^2=4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \in (0;10) \\ t=-3 \notin (0;10) \end{array}\right.$

Vì $f(0)=4; f(10)=\frac{114}{11}; f(1)=3 \Rightarrow \min P=3$ khi $t=1$.

Bài tập 4. Gọi x_0, y_0, z_0 là ba số thực dương sao cho biểu thức

$P=\frac{3}{2x+y+\sqrt{8yz}}-\frac{8}{\sqrt{2(x^2+y^2+z^2)+4xz+3}}-\frac{1}{x+y+z}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Tổng $x_0+y_0+z_0$ bằng

A. 3. **B.** 1. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $P = \dfrac{3}{2x+y+2\sqrt{2yz}} - \dfrac{8}{\sqrt{2y^2+2(x+z)^2+3}} - \dfrac{1}{x+y+z}$

$\geq \dfrac{3}{2(x+y+z)} - \dfrac{8}{(x+y+z)+3} - \dfrac{1}{x+y+z}$.

Đặt $x+y+z=t>0$. Khi đó $P = f(t) = \dfrac{1}{2t} - \dfrac{8}{t+3}, (t>0)$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{3(t-1)(5t+3)}{2t^2(t+3)^2} = 0 \Leftrightarrow t=1$.

Bảng biến thiên

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\dfrac{3}{2}$	$\nearrow$	0

Suy ra $P \geq -\dfrac{3}{2}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ y=2z \\ y=x+z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=z=\dfrac{1}{4} \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Do đó $x_0+y_0+z_0 = \dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}=1$.

Bài tập 5. Cho x,y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} x^2-xy+3=0 \\ 2x+3y-14\leq 0 \end{cases}$.

Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=3x^2y-xy^2-2x^3+2x$ bằng

A. 8. **B.** 0. **C.** 12. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Với điều kiện bài toán $x,y>0$ và $x^2-xy+3=0 \Rightarrow y=\dfrac{x^2+3}{x}=x+\dfrac{3}{x}$.

Lại có

$2x+3y-14\leq 0 \Leftrightarrow 2x+3\left(x+\dfrac{3}{x}\right)-14\leq 0 \Leftrightarrow 5x^2-14x+9\leq 0 \Leftrightarrow x\in\left[1;\dfrac{9}{5}\right]$.

Từ đó $P=3x^2\left(x+\dfrac{3}{x}\right)-x\left(x+\dfrac{3}{x}\right)^2-2x^3+2x=5x-\dfrac{9}{x}$.

Xét hàm số $f(x)=5x-\dfrac{9}{x};\forall x\in\left[1;\dfrac{9}{5}\right] \Rightarrow f'(x)=5+\dfrac{9}{x^2}>0;\forall x\in\left[1;\dfrac{9}{5}\right]$.

Suy ra hàm số đồng biến trên $\left[1;\dfrac{9}{5}\right]$

$\Rightarrow f(1) \le f(x) \le f\left(\frac{9}{5}\right) \Rightarrow -4 \le f(x) \le 4 \Rightarrow \max P + \min P = 4 + (-4) = 0$.

Bài tập 6. Cho x, y, z là ba số thực thuộc đoạn $[1;9]$ và $x \ge y, x \ge z$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{y}{10y - x} + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}\right)$ bằng

A. $\frac{11}{18}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Thật vậy $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \ge \frac{2}{1+\sqrt{ab}} \Leftrightarrow \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \left(\sqrt{ab} - 1\right) \ge 0$ đúng do $ab \ge 1$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi a = b hoặc ab = 1.

Áp dụng bất đẳng thức trên $P = \frac{1}{10 - \frac{x}{y}} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{z}{y}} + \frac{1}{1+\frac{x}{z}}\right) \ge \frac{1}{10 - \frac{x}{y}} + \frac{1}{1+\sqrt{\frac{x}{y}}}$.

Đặt $\sqrt{\frac{x}{y}} = t \in [1;3]$. Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{10 - t^2} + \frac{1}{1+t}$ trên đoạn $[1;3]$.

$f'(t) = \frac{2t}{(10-t^2)^2} - \frac{1}{(1+t)^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t^4 - 2t^3 - 24t^2 - 2t + 100 = 0$.

$\Leftrightarrow (t-2)(t^3 - 24t - 50) = 0 \Leftrightarrow t = 2$ do $t^3 - 24t - 50 < 0, \forall t \in [1;3]$.

Bảng biến thiên

t	1		2		3
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$\frac{11}{18}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{5}{4}$

Suy ra $P_{\min} = \frac{1}{2}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} x = 4y \\ \left[\begin{array}{l} \frac{z}{y} = \frac{x}{z} \\ \frac{x}{y} = 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ z = 2y \end{cases}$

Dạng 9. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số y = f(u(x)),y = f(u(x))±h(x)… khi biết bảng biến thiên hoặc đồ thị của hàm số y = f(x)

1. Phương pháp giải

Thực hiện theo một trong hai cách

Cách 1:

Bước 1. Đặt t = u(x).

Đánh giá giá trị của t trên khoảng K.

Chú ý: Có thể sử dụng khảo sát hàm số, bất đẳng thức để đánh giá giá trị của t = u(x).

Bước 2. Từ bảng biến thiên hoặc đồ thị của hàm số cho ta giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số y = f(t).

Bước 3. Kết luận.

Cách 2:

Bước 1. Tính đạo hàm $y' = u'(x)f'(u(x))$.

Bước 2. Tìm nghiệm $y' = u'(x)f'(u(x))$ =0.

Bước 3. Lập bảng biến thiên.

Bước 4. Kết luận về giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x), y = f(u(x))$,

$y = f(u(x)) \pm h(x)$...

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $y = f(|x-1|)$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;2]$ bằng

A. $f(-2)$. **B.** $f(2)$. **C.** $f(1)$. **D.** $f(0)$.

Hướng dẫn giải

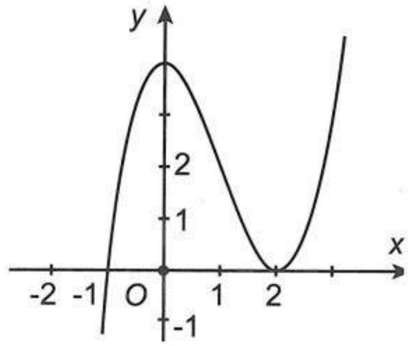
Chọn D.

Đặt $t = |x-1|, \forall x \in [0;2] \Rightarrow t \in [0;1]$.

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số $y = f(t)$ có giá trị nhỏ nhất $\min\limits_{[0;1]} f(t) = f(0)$.

Bài tập 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau. Khi đó hàm số $y = f(2-x^2)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $\left[0;\sqrt{2}\right]$ bằng

A. $f(-2)$. **B.** $f(2)$. **C.** $f(1)$. **D.** $f(0)$.



Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đặt $t=2-x^2$. Từ $x\in\left[0;\sqrt{2}\right]\Leftrightarrow 0\le x^2\le 2\Leftrightarrow 2\ge 2-x^2\ge 0\Rightarrow t\in\left[0;2\right]$.

Dựa vào đồ thị, hàm số $y=f(t)$ có giá trị nhỏ nhất $\min\limits_{[0;2]} f(t)=f(2)$.

Bài tập 3. Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^2+c$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x+3)$ trên đoạn $\left[0;2\right]$ là

A. 64. **B.** 65. **C.** 66. **D.** 67.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Hàm số có dạng $f(x)=ax^4+bx^2+c$. Từ bảng biến thiên ta có

$$\begin{cases} f(0)=3 \\ f(1)=2 \\ f'(1)=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} c=3 \\ a+b+c=2 \\ 4a+2b=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} c=3 \\ b=-2 \\ a=1 \end{cases}\Rightarrow f(x)=x^4-2x^2+3.$$

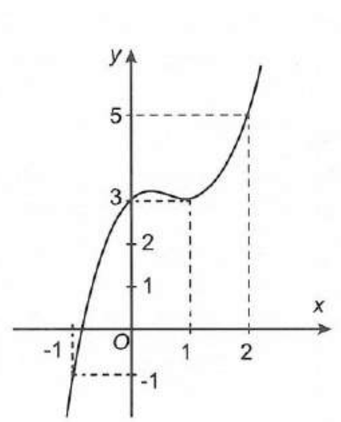
Đặt $t=x+3, x\in\left[0;2\right]\Leftrightarrow t\in\left[3;5\right]$.

Dựa vào đồ thị, hàm số $y=f(t)$ đồng biến trên đoạn $\left[3;5\right]$.

Do đó $\min\limits_{[0;2]} f(x+3)=\min\limits_{[3;5]} f(t)=f(3)=66$.

Dạng 10. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f\left(u\left(x\right)\right)$, $y=f\left(u\left(x\right)\right)\pm h\left(x\right)\ldots$ Khi biết đồ thị của hàm số $y=f'(x)$

Bài tập 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như dưới đây.



Lập hàm số $g(x) = f(x) - x^2 - x$.

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $g(-1) > g(1)$.

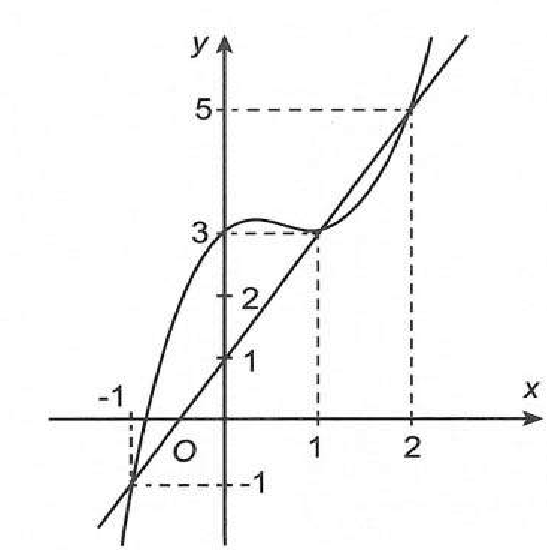
B. $g(-1) = g(1)$.

C. $g(1) = g(2)$.

D. $g(1) > g(2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.



Ta có $g'(x) = f'(x) - 2x - 1$.

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = 2x + 1$ ta có $g'(x) = 0$

$$\Leftrightarrow f'(x) = 2x + 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right. .$$

Bảng biến thiên

x	-1		1		2
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$g(x)$	$g(-1)$	$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$	$g(2)$

Ta chỉ cần so sánh trên đoạn $[-1;2]$. Đường thẳng $y = 2x + 1$ là đường thẳng đi qua các điểm $A(-1;-1)$, $B(1;3)$, $C(2;5)$ nên đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = 2x + 1$ cắt nhau tại 3 điểm.

Dạng 11. Ứng dụng của giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trong các bài toán thực tế

Bài tập 1. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s=3t^2-t^3$. Thời điểm t (giây) mà tại đó vận tốc $v\left(m/s\right)$ của chất điểm chuyển động đạt giá trị lớn nhất là

A. t = 2s **B.** t = 5s **C.** t = 1s **D.** t =3s

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $v\left(t\right)=s'\left(t\right)=6t-3t^2 \Rightarrow v\left(t\right)=-3\left(t-1\right)^2+3\le 3, \forall t\in\mathbb{R}$

Giá trị lớn nhất của $v\left(t\right)=3$ khi $t=1$.

Bài tập 2. Một vật chuyển động theo quy luật $s=-\frac{1}{3}t^3+6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 7 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. 180 (m/s) **B.** 36 (m/s) **C.** 144 (m/s) **D.** 24 (m/s)

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $v\left(t\right)=s'\left(t\right)=-t^2+12t$

$v'\left(t\right)=-2t+12=0\Leftrightarrow t=6$

Vì $v\left(6\right)=36; v\left(0\right)=0; v\left(7\right)=35$ nên vận tốc lớn nhất đạt được bằng 36 (m/s).

Bài tập 3. Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong t giờ được cho bởi công thức $c\left(t\right)=\frac{t}{t^2+1}\left(mg/L\right)$. Sau khi tiêm thuốc bao lâu thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

A. 4 giờ **B.** 1 giờ **C.** 3 giờ **D.** 2 giờ

Hướng dẫn giải

Chọn B

Xét hàm số $c\left(t\right)=\frac{t}{t^2+1}\left(t>0\right)$

$c'\left(t\right)=\frac{1-t^2}{\left(t^2+1\right)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=1\in\left(0;\infty\right)\\ t=-1\notin\left(0;\infty\right)\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

t	0		1		$+\infty$
$c'(t)$		$+$	0	$-$	
$c(t)$	0	$\nearrow$	$c(1)$	$\searrow$	0

Với t = 1 (giờ) thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất.

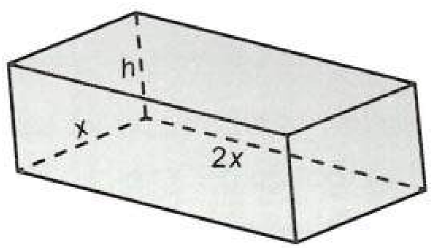
Bài tập 4. Người ta xây một bể chứa nước với dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\frac{500}{3}m^3$. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê nhân công để xây bể là 600.000 đồng $/m^2$. Hãy xác định kích thước của bể sao cho chi phí thuê nhân công thấp nhất. Chi phí đó là

A. 75 triệu đồng **B.** 85 triệu đồng **C.** 90 triệu đồng **D.** 95 triệu đồng

Hướng dẫn giải

Chọn C

Gọi $x(m)$ là chiều rộng của đáy bể, khi đó chiều dài của đáy bể là $2x(m)$ và $h(m)$ là chiều cao bể



Bể có thể tích bằng $2x^2h = \frac{500}{3} \Leftrightarrow h = \frac{250}{3x^2}$

Diện tích cần xây $S = 2(xh + 2xh) + 2x^2 = 6x\frac{250}{3x^2} + 2x^2 = \frac{500}{x} + 2x^2$

Xét hàm $f(x) = \frac{500}{x} + 2x^2, (x > 0); f'(x) = \frac{-500}{x^2} + 4x \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5$

Bảng biến thiên

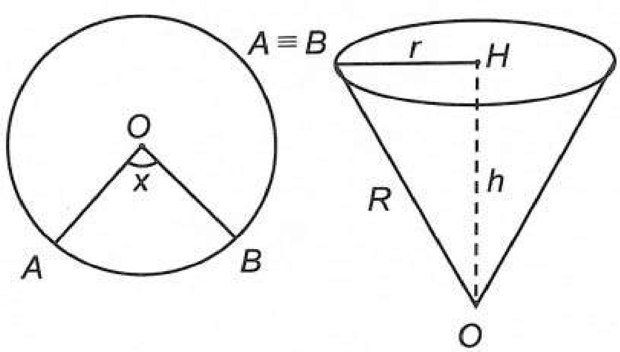
x	0		5		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|$ $+\infty$	$\searrow$	150	$\nearrow$	$+\infty$

Do đó $\min\limits_{(0;+\infty)} f(x) = f(5) = 150$

Chi phí thuê nhân công thấp nhất khi diện tích xây dựng là nhỏ nhất và bằng $S_{\min} = 150$

Vậy giá thuê nhân công thấp nhất là 150.600000 = 90.000.000 đồng.

Bài tập 5. Bác Hoàng có một tấm thép mỏng hình tròn, tâm O, bán kính 4 dm. Bác định cắt ra một hình quạt tròn tâm O, quấn rồi hàn ghép hai mép của hình quạt tròn lại để tạo thành một đồ vật dạng mặt nón tròn xoay (tham khảo hình vẽ). Dung tích lớn nhất có thể của đồ vật mà bác Hoàng tạo ra bằng bao nhiêu? (bỏ qua phần mối hàn và độ dày của tấm thép)



A. $\frac{128\pi\sqrt{3}}{27}dm^3$ **B.** $\frac{128\pi\sqrt{3}}{81}dm^3$ **C.** $\frac{16\pi\sqrt{3}}{27}dm^3$ **D.** $\frac{64\pi\sqrt{3}}{27}dm^3$

Hướng dẫn giải

Khi hàn hai mép của hình quạt tròn, độ dài đường sinh của hình nón bằng bán kính của hình quạt tròn, tức là $OA = 4dm$

Chọn A

Thể tích của hình nón $V = \frac{1}{3}\pi.r^2.h = \frac{1}{3}\pi.\left(16 - h^2\right).h$ với $0 < h < 4$

Ta có $V'(h) = \frac{1}{3}\pi.\left(16 - 3h^2\right) \Rightarrow V'(h) = 0 \Leftrightarrow h = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

h	0		$\frac{4\sqrt{3}}{3}$		4
$V'(h)$	‖	$+$	0	$-$	‖
$V(h)$	0	$\nearrow$	$\frac{128\pi\sqrt{3}}{27}$	$\searrow$	0

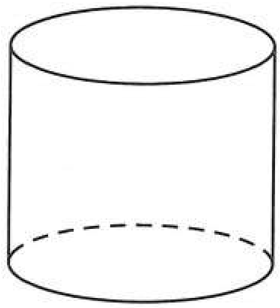
Dựa vào bảng biến thiên, suy ra thể tích lớn nhất của hình nón là $\frac{128\pi\sqrt{3}}{27}dm^3$.

Bài tập 6. Người ta làm chiếc thùng phi dạng hình trụ, kín hai đáy, với thể tích theo yêu cầu là $2\pi m^3$. Hỏi bán kính đáy R và chiều cao h của thùng phi bằng bao nhiêu để khi làm thì tiết kiệm vật liệu nhất

A. $R = \frac{1}{2}m; h = 8m$ **B.** $R = 1m; h = 2m$ **C.** $R = 2m; h = \frac{1}{2}m$ **D.** $R = 4m; h = \frac{1}{5}m$

Hướng dẫn giải

Chọn B



Từ giả thiết ta có $V=\pi R^2h=2\pi \Rightarrow h=\frac{2}{R^2}$

Diện tích toàn phần của thùng phi là $S_{tp}=2\pi Rh+2\pi R^2=2\pi\left(R^2+\frac{2}{R}\right)$

Xét hàm số $f\left(R\right)=R^2+\frac{2}{R}$ với $R\in\left(0;+\infty\right)$

Ta có $f'\left(R\right)=2R-\frac{2}{R^2}=\frac{2\left(R^3-1\right)}{R^2}$

$f'\left(R\right)=0\Leftrightarrow R=1$

Bảng biến thiên

R	0		1		$+\infty$
$f'(R)$	||	$-$	0	$+$	
$f(R)$	|| $+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra diện tích toàn phần đạt giá trị nhỏ nhất khi $R=1\Rightarrow h=2$

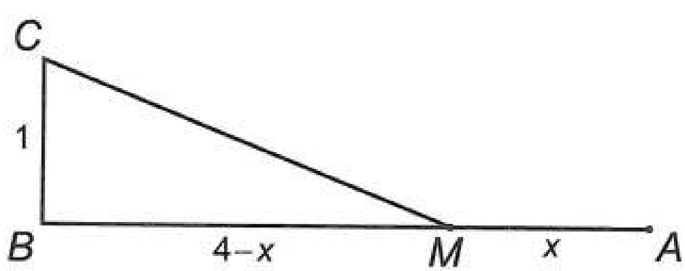
Vậy để tiết kiệm vật liệu nhất khi làm thùng phi thì $R=1m;h=2m$.

Bài tập 7. Một đường dây điện được nối từ một nhà máy điện ở A đến một hòn đảo ở C như hình vẽ. Khoảng cách từ C đến B là 1 km. Bờ biển chạy thẳng từ A đến B với khoảng cách là 4km. Tổng chi phí lắp đặt cho 1km dây điện trên biển là 40 triệu đồng, còn trên đất liền là 20 triệu đồng. Tính tổng chi phí nhỏ nhất để hoàn thành công việc trên (làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy)

A. 120 triệu đồng **B.** 164,92 triệu đồng **C.** 114,64 triệu đồng **D.** 106,25 triệu đồng

Hướng dẫn giải

Chọn C



Gọi M là điểm trên đoạn thẳng AB để lắp đặt đường dây điện ra biển nối với điểm C

Đặt $AM = x \Rightarrow BM = 4 - x \Rightarrow CM = \sqrt{1+(4-x)^2} = \sqrt{17-8x+x^2}, x \in [0;4]$

Khi đó tổng chi phí lắp đặt là $y = x.20 + 40\sqrt{x^2-8x+17}$ (đơn vị: triệu đồng)

$$y' = 20 + 40.\frac{x-4}{\sqrt{x^2-8x+17}} = 20.\frac{\sqrt{x^2-8x+17}+2(x-4)}{\sqrt{x^2-8x+17}}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-8x+17} = 2(4-x) \Leftrightarrow x = \frac{12-\sqrt{3}}{3}$$

Ta có $y\left(\frac{12-\sqrt{3}}{3}\right) = 80 + 20\sqrt{3} \approx 114,64; y(0) = 40\sqrt{17} \approx 164,92; y(4) = 120$

Do đó chi phí nhỏ nhất để hoàn thành công việc là 114,64 triệu đồng.

Dạng 12. Tìm m để $F(x;m) = 0$ có nghiệm trên tập D

1. Phương pháp giải

Thực hiện theo các bước sau

Bước 1. Cô lập tham số m và đưa về dạng $f(x) = g(m)$

Bước 2. Khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(x)$ trên D

Bước 3. Dựa vào bảng biến thiên để xác định giá trị tham số $A(m)$ sao cho đường thẳng $y = g(m)$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$

Bước 4. Kết luận

Chú ý:

+)Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên D thì phương trình $f(x) = g(m)$ có nghiệm khi và chỉ khi

$\min\limits_D f(x) \le g(m) \le \max\limits_D f(x)$

+)Nếu bài toán yêu cầu tìm tham số để phương trình có k nghiệm phân biệt, ta chỉ cần dựa vào bảng biến thiên để xác định điều kiện sao cho đường thẳng $y = g(m)$ nằm ngang cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại k điểm phân biệt

2. Bài tập

Bài tập1: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-100;100]$ để phương trình $2\sqrt{x+1} = x + m$ có nghiệm thực?

A. 100 **B.**101 **C.** 102 **D.** 103

Hướng dẫn giải

Chọn D

Điều kiện $x \geq -1$

Đặt $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ x = t^2 - 1 \end{cases}$

Ta được phương trình $2t = t^2 - 1 + m \Leftrightarrow m = -t^2 + 2t + 1$

Xét hàm số $f(t) = -t^2 + 2t + 1, t \geq 0$

$f'(t) = -2t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Bảng biến thiên

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình đã cho có nghiệm khi $m \leq 2 \Rightarrow -100 \leq m \leq 2$

Vậy có 103 giá trị nguyên m thỏa mãn

Bài tập 2. Cho phương trình $m\left(\sqrt{x^2 - 2x + 2 + 1}\right) - x^2 + 2x = 0$ (m là tham số). Biết rằng tập hợp các giá trị của tham số m để phương trình có nghiệm thuộc đoạn $\left[0; 1 + 2\sqrt{2}\right]$ là đoạn $[a; b]$. Giá trị của biểu thức $T = -a + 2b$ là

A. $T = 4$ **B.** $T = \frac{7}{2}$ **C.** $T = 3$ **D.** $T = \frac{1}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đặt $t = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$

Xét hàm số $t(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$ trên đoạn $\left[0; 1 + 2\sqrt{2}\right]$

$t'(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}} \Rightarrow t' = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Vì $t(0) = \sqrt{2}; t(1) = 1; t\left(1 + 2\sqrt{2}\right) = 3$ nên $t \in [1; 3]$

Yêu cầu của bài toán tương đương với phương trình $m(t+1) = t^2 - 2$ có nghiệm thuộc đoạn $[1; 3] \Leftrightarrow m = \dfrac{t^2 - 2}{t + 1}$ có nghiệm thuộc đoạn $[1; 3]$ (1)

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t^2 - 2}{t + 1}$ trên đoạn $[1; 3]$

$f'(t)=\dfrac{t^2+2t+2}{(t+1)^2}>0,\forall t\in[1;3]$ khi hàm số đồng biến trên đoạn $[1;3]$

Để phương trình (1) đã cho có nghiệm thì $\min\limits_{[1;3]} f(t)\le m\le \max\limits_{[1;3]} f(t)$

$\Leftrightarrow f(1)\le m\le f(3)\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}\le m\le \dfrac{7}{4}$

Vậy $a=-\dfrac{1}{2};b=\dfrac{7}{4}\Rightarrow T=4$.

Bài tập 3. Giá trị nhỏ nhất của tham số m để hệ phương trình $\begin{cases} x+y=2 \\ x^4+y^4=m \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$ có nghiệm là m_0

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m_0\in(-20;-15)$ **B.** $m_0\in(-12;-8)$ **C.** $m_0\in\left(\dfrac{-3}{2};0\right)$ **D.** $m_0\in\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{9}{4}\right)$

Hướng dẫn giải

Chọn D

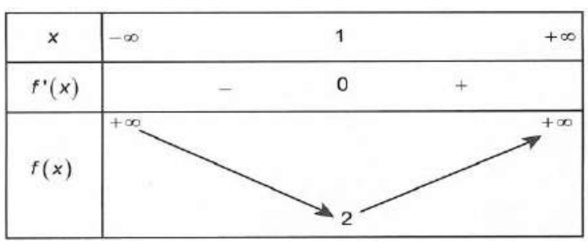
Ta có $\begin{cases} x+y=2 \quad (1) \\ x^4+y^4=m\,(2) \end{cases}$

Từ (1) suy ra $y=2-x$ thay vào (2) ta được (2) $\Rightarrow x^4+(2-x)^4=m \quad (3)$

Xét hàm số $f(x)=x^4+(2-x)^4$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$

$f'(x)=4x^3-4(2-x)^3\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x^3=(2-x)^3\Leftrightarrow x=2-x\Leftrightarrow x=1$

Bảng biến thiên



Hệ đã cho có nghiệm thực khi và chỉ khi phương trình (3) có nghiệm thực

Dựa vào bảng biến thiên ta được $m\ge 2\Rightarrow m_0=2\in\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{9}{4}\right)$.

Dạng 13. Tìm m để bất phương trình $F(x;m)>0;F(x;m)\ge 0;F(x,m)<0;F(x;m)\le 0$ có nghiệm trên tập D

1. Phương pháp giải

Thực hiện theo các bước sau

Bước 1. Cô lập tham số m và đưa về dạng $g(m) > f(x)$ hoặc $g(m) \ge f(x)$ hoặc $g(m) \le f(x)$ hoặc $g(m) < f(x)$

Bước 2. Khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(x)$ trên D

Bước 3. Dựa vào bảng biến thiên xác định các giá trị của tham số m

Bước 4. Kết luận

Chú ý: Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và có giá trị lớn nhất; giá trị nhỏ nhất trên D thì

+) Bất phương trình $g(m) \le f(x)$ có nghiệm trên D $\Leftrightarrow g(m) \le \max\limits_{D} f(x)$

+) Bất phương trình $g(m) \le f(x)$ nghiệm đúng $\forall x \in D \Leftrightarrow g(m) \le \min\limits_{D} f(x)$

+) Bất phương trình $g(m) \ge f(x)$ có nghiệm trên $D \Leftrightarrow g(m) \ge \min\limits_{D} f(x)$

+) Bất phương trình $g(m) \ge f(x)$ nghiệm đúng $\forall x \in D \Leftrightarrow g(m) \ge \max\limits_{D} f(x)$

2. Bài tập

Bài tập 1: Các giá trị của tham số m để bất phương trình $x + \dfrac{4}{x-1} - m \ge 0$ có nghiệm trên khoảng $(-\infty;1)$ là

A. $m < 5$ **B.** $m \le -3$ **C.** $m \le 1$ **D.** $m \ge 3$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Bất phương trình đã cho tương đương với $x + \dfrac{4}{x-1} \ge m$

Xét hàm số $y = x + \dfrac{4}{x-1}$ trên khoảng $(-\infty;1)$

$$y' = 1 - \frac{4}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 4}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \notin (-\infty;1) \\ x = -1 \in (-\infty;1) \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1
y'		+	0	−	
y	$-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$

Từ bảng biến thiên, để bất phương trình $x+\dfrac{4}{x-1}-m\ge 0$ có nghiệm trên khoảng $(-\infty;1)$ thì $m\le -3$.

Bài tập 2. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số $m\in[0;2019]$ để bất phương trình $x^2-m+\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}\le 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in[-1;1]$. Số các phần tử của tập S là

A. 1 **B.** 2020 **C.** 2019 **D.** 2

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $t=\sqrt{1-x^2}$, với $x\in[-1;1]\Rightarrow t\in[0;1]$

Bất phương trình đã cho trở thành $t^3-t^2+1-m\le 0\Leftrightarrow m\ge t^3-t^2+1 \quad (1)$

Yêu cầu của bài toán tương đương với bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $t\in[0;1]$

Xét hàm số $f(t)=t^3-t^2+1\Rightarrow f'(t)=3t^2-2t$

$$f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=0\notin(0;1) \\ t=\dfrac{2}{3}\in(0;1)\end{array}\right.$$

Vì $f(0)=f(1)=1; f\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{23}{27}$ nên $\max\limits_{[0;1]} f(t)=1$

Do đó bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $t\in[0;1]$ khi và chỉ khi $m\ge 1$

Mặt khác m là số nguyên thuộc $[0;2019]$ nên $m\in\{1;2;3;...;2019\}$

Vậy có 2019 giá trị của m thỏa mãn bài toán.

Bài tập 3. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ.

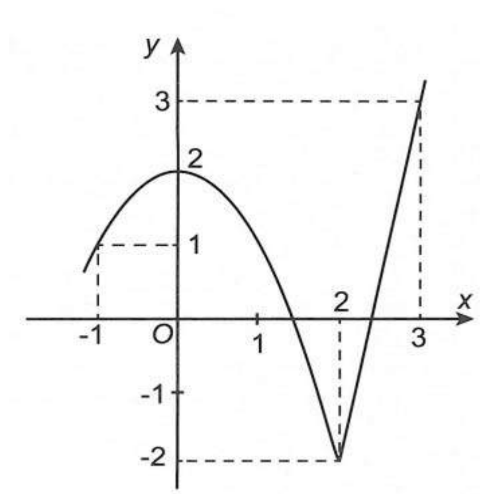
Bất phương trình $f(x)+\sqrt{x+1}+\sqrt{7-x}\ge m$ có nghiệm thuộc $[-1;3]$ khi và chỉ khi

A. $m\le 7$

B. $m\ge 7$

C. $m\le 2\sqrt{2}-2$

D. $m\ge 2\sqrt{2}-2$



Hướng dẫn giải

Chọn A

Xét hàm số $P=\sqrt{x+1}+\sqrt{7-x}$ trên đoạn $[-1;3]$

Ta có $P^2 = 8 + 2\sqrt{(x+1).(7-x)} \le 8 + (x+1) + (7-x) = 16 \Rightarrow P \le 4$

Dấu bằng xảy ra khi $x = 3$

Suy ra $\max\limits_{[-1;3]} P = 4$ tại $x = 3$ (1)

Mặt khác dựa vào đồ thị của $f(x)$ ta có $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = 3$ tại $x = 3$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\max\limits_{[-1;3]}\left(f(x) + \sqrt{x+1} + \sqrt{7-x}\right) = 7$ tại $x = 3$

Vậy bất phương trình $f(x) + \sqrt{x+1} + \sqrt{7-x} \ge m$ có nghiệm thuộc $[-1;3]$ khi và chỉ khi $m \le \max\limits_{[-1;3]}\left(f(x) + \sqrt{x+1} + \sqrt{7-x}\right) \Leftrightarrow m \le 7$.