Các dạng bài tập Tìm giá trị lớn nhất (GTLN), giá trị nhỏ nhất (GTNN) của hàm số và cách giải - Toán lớp 12

Bài tập về tìm giá trị lớn nhất (GTLN) và giá trị nhỏ nhất (GTNN) của hàm số không phải là dạng toán khó, hơn nữa dạng toán này đôi khi xuất hiện trong đề thi tốt nghiệp THPT. Vì vậy các em cần nắm vững để chắc chắn đạt điểm tối đa nếu có dạng toán này.

Vậy cách giải đối với các dạng bài tập tìm giá trị lớn nhất (GTLN) và giá trị nhỏ nhất (GTNN) của hàm số (như hàm số lượng giác, hàm số chứa căn,...) trên khoảng xác định như thế nào? chúng ta cùng tìm hiểu qua bài viết dưới đây.

I. Lý thuyết về GTLN và GTNN của hàm số

• Cho hàm số y = f(x) xác định trên tập D ⊂ R.

- Nếu tồn tại một điểm $x_0 \in X$ sao cho $f(x) \le f(x_0)$ với mọi $x \in X$ thì số $M = f(x_0)$ được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số f trên X.

Ký hiệu: $M = \max_{x \in X} f(x)$

- Nếu tồn tại một điểm $x_0 \in X$ sao cho $f(x) \ge f(x_0)$ với mọi $x \in X$ thì số $m = f(x_0)$ được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số f trên X.

Ký hiệu: $m = \min_{x \in X} f(x)$

II. Các dạng bài tập tìm GTLN và GTNN của hàm số và cách giải

° Dạng 1: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị của nhất của hàm số trên đoạn [a;b].

- Nếu hàm số f(x) liên tục trên đoạn [a;b] và có đạo hàm trên (a;b) thì cahcs tìm GTLN và GTNN của f(x) trên [a;b] như sau:

* Phương pháp giải:

- Bước 1: Tính f'(x), giải phương trình f'(x) = 0 ta được các điểm cực trị x_1; x_2;... ∈ [a;b].

- Bước 2: Tính các giá trị f(a); $f(x_1)$; $f(x_2)$;...; f(b)

- Bước 3: Số lớn nhất trong các giá trị trên là GTLN của hàm số f(x) trên đoạn [a;b]; Số nhỏ nhất trong các giá trị trên là GTNN của hàm số f(x) trên đoạn [a;b].

• ***Chú ý:*** Khi bài toán không chỉ rõ tập X thì ta hiểu tập X chính là tập xác định D của hàm số.

**** Ví dụ 1 (Bài 1 trang 23-24 SGK Giải tích 12):*** Tìm GTLN và GTNN của hàm số:

a) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ trên các đoạn [-4; 4] và [0; 5]

b) $y = x^4 - 3x^2 + 2$ trên các đoạn [0; 3] và [2; 5]

° *Lời giải:*

- Để ý bài toán trên gồm 2 hàm vô tỉ, một hàm hữu tỉ và 1 hàm có chứa căn. Chúng ta sẽ tìm GTLN và GTNN của các hàm này.

a) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ trên các đoạn [-4; 4] và [0; 5]

+) Xét hàm số trên tập D = [-4; 4]

- Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ (∈ D) hoặc x = 3 (∈ D) nên:

$y(-4) = (-4)^3 - 3(-4)^2 - 9(-4) + 35 = -41$

$y(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 35 = 40$

$y(3) = (3)^3 - 3(3)^2 - 9(3) + 35 = 8$

$y(4) = (4)^3 - 3(4)^2 - 9(4) + 35 = 15$

$\Rightarrow \min\limits_{x\in[-4;4]} y = y(-4) = -41$

$\Rightarrow \max\limits_{x\in[-4;4]} y = y(-1) = 40$

+) Xét hàm số trên tập D = [0; 5]

- Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ($\notin D$) hoặc $x = 3$ ($\in D$) nên:

$y(0) = 35$; $y(3) = 8$; $y(5) = 40$.

$\Rightarrow \min\limits_{x\in[0;5]} y = y(3) = 8$

$\Rightarrow \max\limits_{x\in[0;5]} y = y(5) = 40$

b) $y = x^4 - 3x^2 + 2$ trên các đoạn [0; 3] và [2; 5]

- Ta có: $y' = 4x^3 - 6x = 0 \Leftrightarrow 2x(2x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = 0 \\ 2x^2 - 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \\ x = -\sqrt{\frac{3}{2}} = -\frac{\sqrt{6}}{2} \end{array}\right.$

+) Xét D = [0; 3], có: $x = -\dfrac{\sqrt{6}}{2} \notin D$

- Ta có: $y(0) = 2; y(3) = 56; y(\dfrac{\sqrt{6}}{2}) = -\dfrac{1}{4}$

- Vậy $\min\limits_{x\in[0;3]} y = y(\dfrac{\sqrt{6}}{2}) = -\dfrac{1}{4}; \max\limits_{x\in[0;3]} y = y(3) = 56$

+) Xét D = [2; 5], có: $x = 0; x = \pm\dfrac{\sqrt{6}}{2} \notin D$

- Ta có: $y(2) = 6; y(5) = 552$

- Vậy $\min\limits_{x\in[2;5]} y = y(2) = 6; \max\limits_{x\in[2;5]} y = y(5) = 552$

*** Ví dụ 2 (Câu c Bài 1 trang 23-24 SGK Giải tích 12):** Tìm GTLN và GTNN của hàm số hữu tỉ:

$y = \dfrac{2-x}{1-x}$ trên các đoạn [2; 4] và [-3; -2]

° *Lời giải*

- Ta có: $y = \dfrac{2-x}{1-x} = \dfrac{x-2}{x-1}$; TXĐ: R{1}

- Tính: $y' = \dfrac{1.(-1) - 1.(-2)}{(x-1)^2} = \dfrac{1}{(x-1)^2} > 0; \forall x \neq 1$

+) Với D = [2; 4] có: $y(2) = 0$; $y(4) = 2/3$

- Vậy $\underset{x\in[2;4]}{miny} = y(2) = 0; \underset{x\in[2;4]}{maxy} = y(4) = \frac{2}{3}$

+) Với D = [-3; -2] có: y(-3) = 5/4; y(-2) = 4/3

- Vậy $\underset{x\in[-3;-2]}{miny} = y(-3) = \frac{5}{4}; \underset{x\in[-3;-2]}{miny} = y(-2) = \frac{4}{3}$

**** Ví dụ 3 (Câu d Bài 1 trang 23-24 SGK Giải tích 12): Tìm GTLN và GTNN của hàm số chứa căn***:

$y = \sqrt{5-4x}$ trên đoạn [-1; 1].

° Lời giải:

d)$y = \sqrt{5-4x}$ trên đoạn [-1; 1].

- Ta có: TXĐ: $\left(-\infty; \frac{5}{4}\right]$

- Xét tập D = [-1;1] có:

$$y' = \frac{(5-4x)'}{2(\sqrt{5-4x})} = \frac{-2}{\sqrt{5-4x})} < 0, \forall x \in [-1;1]$$

- Ta có: $y(-1) = 3; y(1) = 1$

- Vậy $\underset{x\in[-1;1]}{miny} = y(1) = 1;\ \underset{x\in[-1;1]}{maxy} = y(-1) = 3;$

**** Ví dụ 4 :*** Tìm GTLN và GTNN của hàm số lượng giác: f(x) = 2cos^{2}x + 2cosx - 1

° Lời giải:

- Ở đây ta thấy hàm cosx có dạng pt bậc 2 nên dùng phương pháp đặt ẩn phụ như sau:

- Đặt t = cosx, t ∈ [-1; 1], ta có:

g(t) = 2t^2 + 2t - 1 với t ∈ [-1; 1].

$$g'(t) = 4t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-1}{2} \in [-1;1]$$

- Ta có: $g(-1) = -1; g(1) = 3; g\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$

- Vậy hàm số g(t) đạt giá trị lớn nhất bằng 3 khi:

$t = 1 \Rightarrow cosx = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$

và đạt giá trị nhỏ nhất bằng -3/2 khi: $t = -\frac{1}{2} \Rightarrow cosx = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$

Ví dụ 5 : Tìm GTLN và GTNN của hàm số lượng giác: f(x) = cos2x + 2sinx - 3 với $x \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$

° Lời giải:

- Từ công thức có cos2x = 1 - 2sin^{2}x, ta có:

f(x) = 1 - 2sin^{2}x + 2sinx - 3 = -2sin^{2}x + 2sinx - 2

- Đặt t = sinx; ta có: $x \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right] \Leftrightarrow t \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$

- Ta có: g(t) = -2t^2 + 2t - 2

$g'(t) = -4t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$

- Tính được: $g(-\frac{1}{2}) = -\frac{7}{2}; g(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2}; g(1) = -2$

- Vậy: $\underset{x\in[-\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}]}{max} f(x) = \underset{t\in[-\frac{1}{2};1]}{max} g(t) = g(\frac{1}{2}) = -2$

$\underset{x\in[-\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}]}{min} f(x) = \underset{t\in[-\frac{1}{2};1]}{min} g(t) = g(-\frac{1}{2}) = -\frac{7}{2}$

° Dạng 2: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị của nhất của hàm số trên khoảng (a;b).

* Phương pháp giải:

• *Để tìm GTLN và GTNN của hàm số trên một khoảng (không phải đoạn, tức X ≠ [a;b]), ta thực hiện các bước sau:*

- Bước 1: Tìm tập xác định D và tập X

- Bước 2: Tính y' và giải phương trình y' = 0.

- Bước 3: Tìm các giới hạn khi x dần tới các điểm đầu khoảng của X.

- Bước 4: Lập bảng biến thiên (BBT) của hàm số trên tập X

- Bước 5: Dựa vào BBT suy ra GTLN, GTNN của hàm số trên X.

Ví dụ 1: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số sau: $y = f(x) = x + \frac{4}{x}, (x > 0)$

° Lời giải:

- Ta có: D = (0; +∞)

$y' = 1 - \frac{4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 2 \end{array}\right.$

- Ta thấy x = -2 ∉ (0; +∞) nên loại, mặt khác:

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty; \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

- Ta có bảng biến thiên:

x	0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

- Từ BBT ta kết luận: $\min_{x\in(0;+\infty)} y = y(2) = 4$, hàm số không có GTLN

* ***Ví dụ 2:*** Tìm GTLN, GTNN của hàm số: $y = f(x) = x + \frac{1}{x-1}, x \in (1;+\infty)$

° ***Lời giải:***

- TXĐ: R{1}

- Ta có: $y' = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

- Ta thấy x = 0 ∉ (1; +∞) nên loại, mặt khác:

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty; \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$

- Ta có bảng biến thiên sau:

x	1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	CT 3	$\nearrow$	$+\infty$

- Từ bảng biến thiên ta kết luận: $\min_{x\in(1;+\infty)} y = y(2) = 3$, hàm số không có GTLN.

Như vậy, các em để ý để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số ta có thể sử một trong hai phương pháp là lập bảng biến thiên hoặc không lập bảng biến thiên. Tùy vào mỗi bài toán mà chúng ta lựa chọn phương pháp phù hợp để giải.

Thực tế thì với bài toán tìm GTLN, GTNN trên đoạn chúng ta thường ít khi sử dụng pp lập bảng biến thiên. Lập bảng biến thiên thường sử dụng cho bài toán tìm GTLN và GTNN trên khoảng.