1. Giá trị lớn nhất (GTLN)

Số M được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số (C) khi nó thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} f(x) \le M, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f(x_0) = M \end{cases}$$

Kí hiệu $M = \max\limits_{x \in D} f(x)$ hoặc $M = \max\limits_{D} f(x)$

2. Giá trị nhỏ nhất (GTNN)

Số M được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số (C) khi nó thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} f(x) \ge m, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f(x_0) = m \end{cases}$$

Kí hiệu $m = \min\limits_{x \in D} f(x)$ hoặc $m = \min\limits_{D} f(x)$

3. Phân dạng bài tập

Dạng 1. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của đồ thị hàm số (C) trêm một đoạn

Dưới đây là 3 bước quan trọng để

- tìm những giá trị lớn nhất
- tìm những giá trị nhỏ nhất

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a; b]$

Phương pháp:

Bước 1: Tính y', giải phương trình $y' = 0$ tìm các nghiệm $x_1, x_2, \ldots x_n$ thỏa mãn $a \le x_1 < x_2 < \ldots < x_n \le b$

Bước 2: Tính các giá trị $f(a), f(x_1), \ldots, f(x_n), f(b)$

Bước 3: So sánh các giá trị tính được ở trên và kết luận:

+ Giá trị lớn nhất tìm được trong số các giá trị ở trên là GTLN M của hàm số trên $[a; b]$

+ Giá trị nhỏ nhất tìm được trong số các giá trị ở trên là GTNN m của hàm số trên $[a; b]$

Dạng 2. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của đồ thị hàm số (C) trêm một khoảng

Dưới đây là 3 bước quan trọng để

- tìm những giá trị lớn nhất
- tìm những giá trị nhỏ nhất

Cho hàm số $y = f(x)$ xác đinh và liên tục trên $(a;b)$

Phương pháp:

- ***Bước 1:*** Tính $f'(x)$, giải phương trình $y' = 0$ tìm các nghiệm $x_1, x_2, \dots x_n$ thỏa mãn $a \le x_1 < x_2 < \dots < x_n \le b$

- ***Bước 2:*** Tính các giá trị $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ và $A = \lim\limits_{x \to a^+} f(x); B = \lim\limits_{x \to b^-} f(x)$

- ***Bước 3:*** So sánh các giá trị tính được và kết luận.

+ Nếu GTLN (hoặc GTNN) trong số các giá trị ở trên là A hoặc B thì kết luận hàm số không có GTLN (hoặc GTNN) trên khoảng $(a;b)$

+ Nếu GTLN (hoặc GTNN) trong số các giá trị ở trên là $f(x_i), i \in \{1;2;\dots;n\}$ thì kết luận hàm số đạt GTLN (hoặc GTNN) bằng $f(x_i)$ khi $x = x_i$

Dạng 3. Tìm điều kiện của tham số để hàm số có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện cho trước

Dưới đây là 4 bước quan trọng để tìm

- tìm những giá trị lớn nhất
- tìm những giá trị nhỏ nhất

Cho hàm số $f(x)$ xác đinh và liên tục trên đoạn $[a;b]$

Phương pháp: (chỉ áp dụng cho một số bài toán dễ dàng tìm được nghiệm của y')

Bước 1: Tính y', giải phương trình $y' = 0$ tìm các nghiệm $x_1, x_2, \dots x_n$

Bước 2: Tính các giá trị $f(a), f(x_1), \dots, f(x_n), f(b)$

Bước 3: Biện luận theo tham số để tìm GTLN, GTNN của hàm số trên đoạn $[a;b]$

Bước 4: Thay vào điều kiện bài cho để tìm m

4. Bài tập

Bài tập 1 (Trích câu 31 đề minh họa 2021 của BGD&ĐT). Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ trên đoạn [0;2]. Tổng $M + m$ bằng

A.11.

B.14.

C.5.

D.13.

Hướng dẫn giải

Chọn câu D

Ta có $f'(x) = 4x^3 - 4x$ và $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \pm 1$.

Trên $[0; 2]$, ta xét các giá trị $f(0) = 3,\ f(1) = 2,\ f(2) = 11.$

Do đó $M = 11, m = 2$ và $M + m = 13.$

Bài tập 2 (Câu 28 Trích đề thi minh họa lần 2 năm 2020)

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - 10x^2 + 2$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng:

A. 2. **B.** -23. **C.** -22. **D.** -7.

Lời giải

Chọn C

$y = x^4 - 10x^2 + 2 \Rightarrow y' = 4x^3 - 20x = 4x\left(x^2 - 5\right)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \sqrt{5} \\ x = -\sqrt{5} \end{array}\right. .$$

Các giá trị $x = -\sqrt{5}$ và $x = \sqrt{5}$ không thuộc đoạn $[-1;2]$ nên ta không tính.

Có $f(-1) = -7; f(0) = 2; f(2) = -22$.

Nên giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;2]$ là -22.

Bài tập 3.

Cho hàm số $y=x^4-2x^2+3$. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;2]$ là

A. $\max\limits_{[0;2]} y=3$, $\min\limits_{[0;2]} y=2$.

B. $\max\limits_{[0;2]} y=11$, $\min\limits_{[0;2]} y=3$.

C. $\max\limits_{[0;2]} y=11$, $\min\limits_{[0;2]} y=2$.

D. $\max\limits_{[0;2]} y=11$, $\min\limits_{[0;2]} y=3$.

Hướng dẫn giải

Hàm đã cho liên tục trên $[0;2]$.

$$y'=4x^3-4x\,;\ y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\notin(0;2) \\ x=1\in(0;2) \\ x=-1\notin(0;2) \end{array}\right..$$

$y(0)=3$; $y(1)=2$; $y(2)=11$.

Vậy $\max\limits_{[0;2]} y=11$, $\min\limits_{[0;2]} y=2$.

Bài tập 4.

Cho hàm số $y=-x^2+4x-m$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[-1;3]} y=3$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m<-10$.

B. $-10<m\leq-7$.

C. $-7<m<0$.

D. $0<m<10$.

Hướng dẫn giải

Ta có $y'=-2x+4=0 \Leftrightarrow x=2$.

Suy ra $\min\limits_{[-1;3]} y=\min\{y(2);y(-1);y(3)\}=\min\{-5-\mathrm{m};4-m;3-\mathrm{m}\}=-5-m$.

Theo giả thiết ta có $-5-m=3 \Leftrightarrow m=-8$.

Vậy $-10<m\leq-7$.

Bài tập 5.

Cho hàm số $y=-x^2+4x-m$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\max\limits_{[-1;3]} y=10$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m<-10$. **B.** $-10<m\le -7$. **C.** $-7<m<0$. **D.** $0<m<10$.

Hướng dẫn giải

Ta có $y'=-2x+4=0 \Leftrightarrow x=2$.

Suy ra $\max\limits_{[-1;3]} y=\max\left\{y(2);y(-1);y(3)\right\}=\max\left\{-5-\mathrm{m};4-m;3-\mathrm{m}\right\}=4-m$.

Theo giả thiết ta có $4-m=10 \Leftrightarrow m=-6$.

Vậy $-7<m<0$.

Bài tập 6. (câu 48 trích đề thi minh họa lần 2 năm 2019 – 2020)

Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|+\min\limits_{[0;1]}|f(x)|=2$. Số phần tử của S là

A. 6. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

a/ Xét $m=1$, ta có $f(x)=1\ \forall x\neq -1$

Dễ thấy $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|=1$, $\min\limits_{[0;1]}|f(x)|=1$ suy ra $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|+\min\limits_{[0;1]}|f(x)|=2$.

Tức là $m=1$ thỏa mãn yêu cầu.

b/ Xét $m\neq 1$ ta có $f'(x)=\dfrac{1-m}{(x+1)^2}$ không đổi dấu $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

Suy ra $f(x)$ đơn điệu trên đoạn $[0;1]$

Ta có $f(0)=m;\ f(1)=\dfrac{1+m}{2}$

Trường hợp 1: $m.\dfrac{1+m}{2}\leq 0\Leftrightarrow -1\leq m\leq 0\Rightarrow\begin{cases}\min\limits_{[0;1]}|f(x)|=0\\ \max\limits_{[0;1]}|f(x)|=\max\left\{|m|;\left|\dfrac{m+1}{2}\right|\right\}\end{cases}$

Do $-1\leq m\leq 0\Rightarrow |m|+\left|\dfrac{m+1}{2}\right|<2$.

Suy ra không thỏa mãn điều kiện $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|+\min\limits_{[0;1]}|f(x)|=2$

Trường hợp 2: $m.\dfrac{1+m}{2}>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>0\,(m\neq 1)\\ m<-1\end{array}\right.$

Suy ra $\min\limits_{[0;1]}|f(x)|+\max\limits_{[0;1]}|f(x)|=|m|+\left|\dfrac{m+1}{2}\right|=\left|\dfrac{3m+1}{2}\right|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\,(KTM)\\ m=-\dfrac{5}{3}\,(TM)\end{array}\right.$

Vậy $S=\left\{1;-\dfrac{5}{3}\right\}$.