

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT- GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ CHỨA DẤU TRỊ TUYỆT ĐỐI

GV: Trần Minh Ngọc

Nhóm giáo viên tiếp sức Chinh phục kỳ thi THPT 2020

Trong đề tham khảo của Bộ GD lần 1 và lần 2, cũng như đề thi thử của các sở giáo dục, các trường phổ thông năm 2020 thường có bài toán liên quan đến GTLN-GTNN của hàm số chứa dấu trị tuyệt đối. Để giải quyết được các dạng toán này các em cần ghi nhớ bài toán tổng quát sau:

Bài toán tổng quát: Cho hàm số $y = |f(x)|$. Tìm GTLN-GTNN của hàm số trên đoạn $[a;b]$

Phương pháp chung:

Bước 1: Tìm $\max_{[a;b]} f(x) = p$; $\min_{[a;b]} f(x) = q$.

Bước 2: Xét các khả năng

- Nếu $p \cdot q \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} \min_{[a;b]} |f(x)| = 0 \\ \max_{[a;b]} |f(x)| = \max\{|p|; |q|\} \end{cases}$
- Nếu $q > 0 \Rightarrow \begin{cases} \min_{[a;b]} |f(x)| = q \\ \max_{[a;b]} |f(x)| = p \end{cases}$
- Nếu $p < 0 \Rightarrow \begin{cases} \min_{[a;b]} |f(x)| = |p| = -p \\ \max_{[a;b]} |f(x)| = |q| = -q \end{cases}$

Chú ý công thức tính nhanh:

$$\max_{[a;b]} |f(x)| = \frac{|p+q| + |p-q|}{2}; \quad \min_{[a;b]} |f(x)| = \begin{cases} 0, & \text{nếu } p \cdot q \leq 0 \\ \frac{|p+q| - |p-q|}{2}, & \text{nếu } p \cdot q > 0 \end{cases}$$

Tùy theo từng bài toán cụ thể mà ta áp dụng cho hợp lý nhất. Sau đây chúng ta sẽ áp dụng cho 3 dạng thường gặp nhất.

Dạng 1: Tìm tham số để $\begin{cases} \min_{[a;b]} |f(x)| \leq k (\geq k) \\ \max_{[a;b]} |f(x)| \leq k (\geq k) \end{cases}$

Ví dụ mẫu 1: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^4 - 2x^2 - m|$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng 2. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. -2.

B. 7.

C. 14.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Xét } f(x) = x^4 - 2x^2 - m \text{ trên đoạn } [-1; 2] \text{ có } f'(x) = 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in [-1; 2] \\ x = 0 \in [-1; 2] \\ x = -1 \in [-1; 2] \end{cases} .$$

$$\text{Khi đó } f(0) = -m; f(\pm 1) = -m - 1; f(2) = -m + 8.$$

$$\text{Suy ra: } \max_{[-1; 2]} f(x) = -m + 8 \text{ và } \min_{[-1; 2]} f(x) = -m - 1.$$

- Nếu $(-1 - m)(8 - m) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 8$ thì $\min_{[-1; 2]} f(x) = 0$, không thỏa mãn đề bài.
- Nếu $-m - 1 > 0 \Leftrightarrow m < -1$ thì $\min_{[-1; 2]} y = |-m - 1| = -m - 1$

$$\text{Khi đó } -m - 1 = 2 \Leftrightarrow m = -3 (t/m).$$

$$\text{Nếu } -m + 8 < 0 \Leftrightarrow m > 8 \text{ thì } \min_{[-1; 2]} y = |-m + 8| = m - 8; \text{ khi đó } m - 8 = 2 \Leftrightarrow m = 10 (t/m).$$

Vậy tổng tất cả các phần tử của S bằng 7.

Ví dụ mẫu 2: Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số

$$y = \left| \frac{x^2 - mx + 2m}{x - 2} \right| \text{ trên đoạn } [-1; 1] \text{ bằng 3. Tính tổng tất cả các phần tử của } S.$$

A. $-\frac{8}{3}$.

B. 5.

C. $\frac{5}{3}$.

D. -1.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Xét hàm số } f(x) = \frac{x^2 - mx + 2m}{x - 2} \text{ trên } [-1; 1] \text{ có } f'(x) = 1 - \frac{4}{(x - 2)^2};$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \notin [-1; 1] \end{cases}; f(-1) = -m - \frac{1}{3}; f(0) = -m; f(1) = -m - 1.$$

Suy ra: $\max_{[-1;1]} f(x) = -m$ và $\min_{[-1;1]} f(x) = -m - 1$.

- Nếu $-m(-m-1) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 0$; $\max_{[-1;1]} y = \{|-m-1|; |-m|\} = \{m+1; -m\}$.

Có hai khả năng $\begin{cases} 3 = -m \\ 3 = m+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -3 \\ m = 2 \end{cases}$, không thỏa mãn.

- Nếu $f(0) = -m < 0 \Leftrightarrow m > 0$. Khi đó $\max_{[-1;1]} y = |-m-1| = m+1$

$$\Rightarrow m+1 = 3 \Leftrightarrow m = 2 \text{ (thỏa mãn)}$$

- Nếu $-m-1 > 0 \Leftrightarrow m < -1$. Khi đó $3 = \max_{[-1;1]} |f(x)| = f(0) \Leftrightarrow m = -3$.

Vậy có hai giá trị thỏa mãn là $m_1 = -3, m_2 = 2$. Do đó tổng tất cả các phần tử của S là -1 .

Ví dụ mẫu 3: Cho hàm số $y = |x^3 - x^2 - x + m|$ với $m \in \mathbb{Z}$. Có tất cả bao nhiêu số nguyên m

để $\min_{[1;3]} y < 3$?

A. 21.

B. 22.

C. 4.

D. 20.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $f(x) = x^3 - x^2 - x + m; x \in [1; 3]$.

$$\text{Ta có } f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in [1; 3] \\ x = -\frac{1}{3} \notin [1; 3] \end{cases}$$

Ta có $f(1) = m - 1, f(3) = m + 15$.

Suy ra $\min_{[1;3]} f(x) = m - 1; \max_{[1;3]} f(x) = m + 15$.

- Nếu $(m-1)(m+15) \leq 0 \Leftrightarrow -15 \leq m \leq 1$; $\min_{[1;3]} y = 0 < 3$. Trường hợp này có 17 số nguyên thỏa mãn.
- Nếu $m-1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$; $\min_{[1;3]} y = m-1 < 3 \Rightarrow 1 < m < 4$. Trường hợp này có 2 số nguyên thỏa mãn.

- Nếu $m + 15 < 0 \Leftrightarrow m < -15$; $\min_{[1;3]} y = |m + 15| < 3 \Rightarrow -m - 15 < 3 \Rightarrow -18 < m < -15$. Trường hợp này có 2 số nguyên thỏa mãn. Vậy có tất cả 21 số nguyên thỏa mãn.

Bài tập tự luyện:

Câu 1. (Chuyên BN lần 2) Có bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^4 + 4x^3 - m|$ trên đoạn $[-4; -2]$ bằng 2020 ?

A. 1.

B. 2.

C. 3. D. 4.

Câu 2. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số

$y = \left| \frac{x^2 + mx + 3m}{x + 3} \right|$ trên đoạn $[-2; 2]$ bằng 5. Gọi T là tổng tất cả các phần tử của S . Tính T .

A. $T = 4$.

B. $T = -5$.

C. $T = 1$.

D. $T = -4$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2 + mx + 3m}{x + 3}$, hàm số luôn xác định trên tập đang xét.

$$f'(x) = \frac{x^2 + 6x}{(x+3)^2} = 0 \Rightarrow x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -6 \end{cases}$$

Ta có: $f(-2) = m + 4$; $f(0) = m$; $f(2) = m + \frac{4}{5}$.

Với $g(x) = |f(x)| = \left| \frac{x^2 + mx + 3m}{x + 3} \right|$. Ta có $\max_{[-2;2]} g(x) = \max \{ |f(-2)|; |f(0)| \}$.

Xét $m(m + 4) \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 0$ thì $\begin{cases} -m = 5 \\ m + 4 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -5 \\ m = 1 \end{cases}$ (loại).

Xét với $m > 0$. Ta có $\max_{[-2;2]} g(x) = |f(-2)| = |m + 4| = m + 4 = 5 \Rightarrow m = 1$.

Xét với $m < -4$, ta có $\max_{[-2;2]} g(x) = |f(0)| = |m| = -m = 5 \Rightarrow m = -5$.

Vậy $S = \{-5; 1\}$ nên tổng $T = (-5) + 1 = -4$.

Câu 3. Cho S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |-x^4 + 2x^2 + m| + 1$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng 6. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. 7.

B. 17.

C. -3.

D. -7.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $g(x) = -x^4 + 2x^2 + m$ trên $[0; 2]$.

$$\text{Ta có } g'(x) = -4x^3 + 4x \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [0; 2] \\ x = 1 \in [0; 2] \\ x = -1 \notin [0; 2] \end{cases}$$

$$\text{Ta có } f(0) = |m| + 1; f(1) = |m+1| + 1; f(2) = |m-8| + 1 \Rightarrow \begin{cases} \max_{[0;2]} f(x) = |m+1| + 1 \\ \max_{[0;2]} f(x) = |m-8| + 1 \end{cases}$$

$$\text{+) Nếu } \max_{[0;2]} f(x) = |m+1| + 1 \Rightarrow \begin{cases} |m+1| + 1 = 6 \\ |m+1| \geq |m-8| \end{cases} \Leftrightarrow m = 4$$

$$\text{+) Nếu } \max_{[0;2]} f(x) = |m-8| + 1 \Rightarrow \begin{cases} |m-8| + 1 = 6 \\ |m-8| \geq |m+1| \end{cases} \Leftrightarrow m = 3$$

Vậy tổng các giá trị của m bằng 7.

Câu 4. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = |x^2 - 3x + 2 + m|$ thỏa mãn $\min_{[-2; 2]} y = 5$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. $-\frac{47}{4}$.

B. -10.

C. $\frac{-31}{4}$.

D. $\frac{9}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $g(x) = x^2 - 3x + 2 + m$ trên đoạn $[-2; 2]$, có: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.

$$\max_{[-2;2]} g(x) = \max \left\{ g(-2), g\left(\frac{3}{2}\right), g(2) \right\} = m + 12 \quad ;$$

$$\min_{[-2;2]} g(x) = \min \left\{ g(-2), g\left(\frac{3}{2}\right), g(2) \right\} = m - \frac{1}{4}.$$

Nếu $m - \frac{1}{4} \geq 0$ hay $m \geq \frac{1}{4}$ thì $\min_{[-2;2]} y = m - \frac{1}{4} = 5 \Leftrightarrow m = \frac{21}{4}$ (thỏa mãn).

Nếu $m + 12 \leq 0$ hay $m \leq -12$ thì $\min_{[-2;2]} y = -m - 12 = 5 \Leftrightarrow m = -17$ (thỏa mãn).

Nếu $-12 < m < \frac{1}{4}$ thì $\min_{[-2;2]} y = 0$ (không thỏa mãn).

Ta có: $S = \left\{ -17; \frac{21}{4} \right\}$. Vậy tổng các phần tử của S bằng $-\frac{47}{4}$.

Câu 5. Có tất cả bao nhiêu số thực m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-3; 2]$ bằng 10.

A. 4.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Suy ra $\min_{[-32;243]} f(t) = \min \{-32 + m; 243 + m\}$

Nếu $(243 + m)(-32 + m) \leq 0$ suy ra $\min_{[-32;243]} y = \min_{[-32;243]} |f(t)| = 0$, không thỏa mãn

Yêu cầu bài toán $\min_{[-32;243]} y = 10$ suy ra điều kiện cần là $(243 + m)(-32 + m) > 0$

TH1: $m > 32 \Rightarrow \min_{[-32;243]} y = |-32 + m| = 10 \Leftrightarrow m - 32 = 10 \Leftrightarrow m = 42$.

TH2: $m < -243 \Rightarrow 10 = \min_{[-32;243]} y = |243 + m| = -m - 243 \Leftrightarrow m = -253$

Vậy có 2 giá trị của tham số m thỏa yêu cầu.

Câu 6. Cho hàm số $f(x) = \left| \frac{x^2 - mx + 2m}{x - 2} \right|$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m

để $\max_{[-1;1]} f(x) \leq 5$. Tổng tất cả các phần tử của S là

A. -11.

B. 9.

C. -5.

D. -1.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Xét hàm số } g(x) = \frac{x^2 - mx + 2m}{x - 2} \Rightarrow g'(x) = \frac{x^2 - 4x}{(x - 2)^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}.$$

$$\text{Khi } x = 0 \Rightarrow g(0) = -m.$$

$$\text{Ta có } g(-1) = \frac{1}{3}(-3m - 1) = -m - \frac{1}{3}; \quad g(1) = \frac{1+m}{-1} = -1 - m.$$

$$\text{Mà } -1 - m < -\frac{1}{3} - m < -m.$$

$$\text{Suy ra } \max_{[-1;1]} f(x) = \max \left\{ |m|, |m+1|, \left| m + \frac{1}{3} \right| \right\} = \max \{ |m|, |m+1| \}$$

$$\text{Trường hợp 1: } \begin{cases} |m+1| \geq |m| \\ |m+1| \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -\frac{1}{2} \\ -6 \leq m \leq 4 \end{cases} \Rightarrow m \in \{0; 1; 2; 3; 4\}.$$

$$\text{Trường hợp 2: } \begin{cases} |m+1| < |m| \\ |m| \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{1}{2} \\ -5 \leq m \leq 5 \end{cases} \Rightarrow m \in \{-5; -4; -3; -2; -1\}.$$

Suy ra tổng các phần tử của S bằng -5 .

Dạng 2: Tìm tham số để $\alpha \cdot \min_{[a;b]} |f(x)| \pm \beta \cdot \max_{[a;b]} |f(x)| \leq k, (\geq k)$.

Ví dụ mẫu 1: Cho hàm số $y = x^3 - 3x + m$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho $\min_{[0;2]} |y| + \max_{[0;2]} |y| = 6$. Số phần tử của S là

A. 0.

B. 6.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $y = x^3 - 3x + m, x \in [0; 2]$

$$y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1(l) \end{cases}$$

Ta có: $y(0) = m; y(1) = m - 2; y(2) = m + 2$.

Suy ra: $\min_{[0;2]} y = m - 2; \max_{[0;2]} y = m + 2$.

TH 1: $(m + 2)(m - 2) \leq 0 \Rightarrow -2 \leq m \leq 2$.

$$\Rightarrow \min_{[0;2]} |y| = 0, \max_{[0;2]} |y| = \{|m - 2|; |m + 2|\}.$$

$$\Rightarrow \min_{[0;2]} |y| + \max_{[0;2]} |y| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 + 2 - m = 6 \\ m + 2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow m = \pm 4, \text{ không thỏa mãn.}$$

$$\text{TH 2: } m - 2 > 0 \Leftrightarrow m > 2 \Rightarrow \min_{[0;2]} |y| = |m - 2| = m - 2, \max_{[0;2]} |y| = |2 + m| = m + 2$$

$$\Rightarrow \min_{[0;2]} |y| + \max_{[0;2]} |y| = 6 \Leftrightarrow m - 2 + m + 2 = 6 \Leftrightarrow m = 3(t/m)$$

$$\text{TH 3: } 2 + m < 0 \Leftrightarrow m < -2 \Rightarrow \min_{[0;2]} |y| = |2 + m| = -2 - m; \max_{[0;2]} |y| = |-2 + m| = -(-2 + m) = 2 - m$$

$$\Rightarrow \min_{[0;2]} |y| + \max_{[0;2]} |y| = 6 \Leftrightarrow -2 - m + 2 - m = 6 \Leftrightarrow m = -3(t/m).$$

Vậy có 2 số nguyên thỏa mãn.

Ví dụ mẫu 2: (Sở Phú Thọ 2020) Cho hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 + m$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-20; 20]$ sao cho $\max_{[0;2]} |f(x)| < 3 \min_{[0;2]} |f(x)|$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 63.

B. 51.

C. 195.

D. 23.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 + m$ trên đoạn $[0; 2]$

$$\text{Ta có: } f'(x) = 4x^3 - 4x; f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

$$f(1) = m - 1; f(2) = m + 8; f(0) = m.$$

$$\max_{[0;2]} f(x) = m + 8; \min_{[0;2]} f(x) = m - 1.$$

$$\text{+) Nếu } m - 1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 1 \text{ thì } \max_{[0;2]} |f(x)| = m + 8, \min_{[0;2]} |f(x)| = m - 1.$$

$$\text{Khi đó: } \max_{[0;2]} |f(x)| < 3 \min_{[0;2]} |f(x)| \Leftrightarrow 8 + m < 3(m - 1) \Leftrightarrow m > \frac{11}{2}.$$

$$\text{+) Nếu } m + 8 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -8 \text{ thì } \max_{[0;2]} |f(x)| = 1 - m, \min_{[0;2]} |f(x)| = -m - 8.$$

$$\text{Khi đó: } \max_{[0;2]} |f(x)| < 3 \min_{[0;2]} |f(x)| \Leftrightarrow 1 - m < 3(-m - 8) \Leftrightarrow m < -\frac{25}{2}.$$

$$\text{+) Nếu } (m - 1)(m + 8) < 0 \Leftrightarrow -8 < m < 1 \text{ thì}$$

$$\max_{[0;2]} |f(x)| = \max\{|m + 8|, |m - 1|\} = \max\{m + 8, 1 - m\} > 0; \min_{[0;2]} |f(x)| = 0.$$

$$\text{Khi đó, không thỏa điều kiện } \max_{[0;2]} |f(x)| < 3 \min_{[0;2]} |f(x)|.$$

$$\text{Do đó: } \begin{cases} m < -\frac{25}{2} \\ m > \frac{11}{2} \end{cases} \text{ kết hợp với } m \in [-20; 20] \text{ ta có } m \in \left[-20; -\frac{25}{2}\right) \cup \left(\frac{11}{2}; 20\right]$$

Mà $m \in z \Rightarrow S = \{-20; -19; -18; \dots; -13; 6; 7; \dots, 20\}$.

Tổng các phần tử của S bằng $6+7+8+9+10+11+12=63$.

Ví dụ mẫu 3: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2x+m}{x-1}$. Tính tổng các giá trị của tham số m để

$$\left| \max_{[2;3]} f(x) - \min_{[2;3]} f(x) \right| = 2.$$

A. -4.

B. -2.

C. -1.

D. -3.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = f(x) = \frac{2x+m}{x-1}$ xác định và liên tục trên đoạn $[2;3]$.

Với $m = -2$, hàm số trở thành $y = 2 \Rightarrow \max_{[2;3]} f(x) = \min_{[2;3]} f(x) = 2$ (không thỏa).

Với $m \neq -2$, ta có $y' = \frac{-2-m}{(x-1)^2}$.

Khi đó hàm số luôn đồng biến hoặc nghịch biến trên $[2;3]$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \max_{[2;3]} f(x) = f(2); \min_{[2;3]} f(x) = f(3) \\ \max_{[2;3]} f(x) = f(3); \min_{[2;3]} f(x) = f(2) \end{cases}$$

$$\text{Do đó: } \left| \max_{[2;3]} f(x) - \min_{[2;3]} f(x) \right| = |f(3) - f(2)| = \left| \frac{6+m}{2} - (4+m) \right| = \left| \frac{2+m}{2} \right|.$$

$$\text{Theo giả thiết } \left| \max_{[2;3]} f(x) - \min_{[2;3]} f(x) \right| = 2 \Leftrightarrow \left| \frac{2+m}{2} \right| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -6 \end{cases}.$$

Vậy tổng các giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán là: -4.

Bài tập tự luyện

Câu 1. Cho hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 + m$, (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên $m \in [-10;10]$ sao cho $\max_{[1;2]} |f(x)| + \min_{[1;2]} |f(x)| \geq 10$. Số phần S là

A. 9.

B. 10.

C. 11.

D. 12.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 + m$, hàm số liên tục trên đoạn $[1; 2]$.

Ta có: $f'(x) = 4x^3 - 4x > 0, \forall x \in (1; 2) \Rightarrow$ hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[1; 2]$,

do đó $\max_{[1;2]} f(x) = m + 8; \min_{[1;2]} f(x) = m - 1$.

TH 1: $m - 1 \geq 0 \Rightarrow 1 \leq m \leq 10$ thì $\max_{[1;2]} |f(x)| = m + 8; \min_{[1;2]} |f(x)| = m - 1$.

Khi đó: $\max_{[1;2]} |f(x)| + \min_{[1;2]} |f(x)| \geq 10 \Leftrightarrow m + 8 + m - 1 \geq 10 \Rightarrow m \geq \frac{3}{2} \Rightarrow m \in \{2; 3; 4; \dots; 10\}$,

\Rightarrow trường hợp này có 9 số nguyên.

TH 2: $m + 8 \leq 0 \Rightarrow -10 \leq m \leq -8$ thì $\max_{[1;2]} |f(x)| = -m + 1; \min_{[1;2]} |f(x)| = -m - 8$.

Khi đó: $\max_{[1;2]} |f(x)| + \min_{[1;2]} |f(x)| \geq 10 \Leftrightarrow -m + 1 - m - 8 \geq 10 \Rightarrow -10 \leq m \leq \frac{-17}{2} \Rightarrow m \in \{-10; -9\}$

\Rightarrow trường hợp này có 2 số nguyên.

TH 3: $-8 < m < 1$, thì $\min_{[1;2]} |f(x)| = 0; \max_{[1;2]} |f(x)| = \begin{cases} -m + 1 & \text{khi } -8 < m \leq \frac{-7}{2} \\ m + 8 & \text{khi } \frac{-7}{2} < m < 1 \end{cases}$;

Do m là số nguyên nên: $\max_{[1;2]} |f(x)| + \min_{[1;2]} |f(x)| \geq 10 \Leftrightarrow \begin{cases} -m + 1 \geq 10, & \text{khi } -8 < m \leq -4 \\ m + 8 \geq 10, & \text{khi } -4 < m < 1 \end{cases}$;

\Rightarrow không tồn tại m thỏa mãn.

Vậy số phần tử của tập S là 11.

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 + m$, (m là tham số thực). Biết

$\max_{[1;2]} |f(x)| = p; \min_{[1;2]} |f(x)| = q$ và S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên $m \in [-10; 10]$ sao cho

bộ ba số $p, q, 19$ là độ dài ba cạnh của một tam giác. Số phần tử của tập S bằng

A. 5.

B. 10.

C. 4.

D. 21.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 + m$, hàm số liên tục trên đoạn $[1; 2]$.

Ta có: $f'(x) = 4x^3 - 4x > 0, \forall x \in (1;2) \Rightarrow$ hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[1;2]$,

do đó $\max_{[1;2]} f(x) = m+8; \min_{[1;2]} f(x) = m-1$, suy ra $q < p < 19; \forall m \in [-10;10]$.

$$\text{Hay YCBT} \Leftrightarrow \begin{cases} p+q > 19 \\ p, q > 0 \end{cases}.$$

TH 1: $m-1 > 0 \Rightarrow 1 < m \leq 10$, thì $p = m+8; q = m-1$.

Yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow p+q > 19 \Leftrightarrow m+8+m-1 > 19 \Rightarrow m > 6 \Rightarrow m \in \{7;8;9;10\}$,

\Rightarrow trường hợp này có 4 số nguyên.

TH 2: $m+8 < 0 \Rightarrow -10 \leq m < -8$ thì $p = -m+1; q = -m-8$.

Yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow p+q > 19 \Leftrightarrow -m+1-m-8 > 19 \Rightarrow m < -13$

\Rightarrow trường hợp này không tồn tại $m \in [-10;10]$ thỏa mãn.

TH 3: $-8 < m < 1$, thì $q = 0; \Rightarrow$ không thỏa mãn YCBT.

Vậy số phần tử của tập S là 4.

Câu 3. Cho hàm số $f(x) = x^3 - x^2 + x - m - 2$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\max_{[0;3]} |f(x)| + \min_{[0;3]} |f(x)| = 16$. Tổng các phần tử của S là

A. 3.

B. 17.

C. 34.

D. 31.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $f(x) = x^3 - x^2 + x - m - 2$, trên đoạn $[0;3]$

ta có $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có $f(0) = -m-2; f(3) = -m+19$

Trường hợp 1: $(m+2)(m-19) \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 19 \Rightarrow \begin{cases} \min_{[0;3]} |f(x)| = 0 \\ \max_{[0;3]} |f(x)| = \max\{|m+2|, |m-19|\} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \max_{[0;3]} |f(x)| = m+2, \text{ khi } \frac{17}{2} \leq m \leq 19 \\ \max_{[0;3]} |f(x)| = 19-m, \text{ khi } -2 \leq m < \frac{17}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \max_{[0;3]} |f(x)| + \min_{[0;3]} |f(x)| = 16 \Rightarrow \begin{cases} m+2 = 16, \text{ khi } \frac{17}{2} \leq m \leq 19 \\ 19-m = 16, \text{ khi } 0 \leq m < \frac{17}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 14 \\ m = 3 \end{cases}$$

$$\text{Trường hợp 2: } (m+2)(m-19) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 19 \\ m < -2 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \min_{[0;3]} |f(x)| + \max_{[0;3]} |f(x)| = |m+2| + |m-19| = |2m-17| = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} \text{ (KTM)} \\ m = \frac{33}{2} \text{ (KTM)} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \{3; 14\}.$$

Câu 4. Cho hàm số $y = |x^4 - 2x^3 + x^2 + m|$. Tổng tất cả các giá trị của tham số m để $\min_{[-1;2]} y + \max_{[-1;2]} y = 20$ là

A. -10.

B. -4.

C. 20.

D. -21.

Lời giải

Chọn B

Xét $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + m$ trên đoạn $[-1; 2]$

$$\Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x; \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 1; x = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ta có: } f(0) = m; f(1) = m; f\left(\frac{1}{2}\right) = m + \frac{1}{16}; f(-1) = f(2) = m + 4.$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \max_{[-1;2]} f(x) = f(2) = m + 4 \\ \min_{[-1;2]} f(x) = f(0) = f(1) = m \end{cases}$$

$$\text{TH1: Nếu } m \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ m + m + 4 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow m = 8.$$

$$\text{TH2: Nếu } m \leq -4 \Rightarrow \begin{cases} m \leq -4 \\ -(m+4) - m = 20 \end{cases} \Leftrightarrow m = -12.$$

TH3 : Nếu $-4 < m < 0 \Rightarrow \min_{[-1;2]} y = 0; \max_{[-1;2]} y = \max \{|m+4|, |m|\} = \max \{m+4, -m\}$.

Suy ra $\min_{[-1;2]} y + \max_{[-1;2]} y < 4 < 0 + 20 = 20$ không thỏa mãn.

Vậy tổng các giá trị của m là -4 .

Câu 5. Cho hàm số $f(x) = \frac{2x-m}{x+2}$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\max_{[0;2]} |f(x)| + 2 \min_{[0;2]} |f(x)| \geq 4$. Hỏi trong đoạn $[-30;30]$ tập S có bao nhiêu số nguyên?

A. 53.

B. 52.

C. 55.

D. 54.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f'(x) = \frac{4+m}{(x+2)^2}$

+ Nếu $m = -4$ thì $f(x) = 2$ thỏa mãn $\max_{[0;2]} |f(x)| + 2 \min_{[0;2]} |f(x)| \geq 4$.

+ Xét $m \neq -4$. Ta có $f(0) = -\frac{m}{2}; f(2) = \frac{4-m}{4}$.

* TH1: $\frac{-m}{2} \left(\frac{4-m}{4} \right) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 4$.

Khi đó $\min_{[0;2]} |f(x)| = 0$ và $\max_{[0;2]} |f(x)| = \frac{4-m}{4}$ hoặc $\max_{[0;2]} |f(x)| = \frac{m}{2}$.

Theo giả thiết ta phải có $\begin{cases} \frac{4-m}{4} \geq 4 \\ \frac{m}{2} \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -12 \\ m \geq 8 \end{cases}$ (loại).

• TH2:

+ Xét $-4 < m < 0$: hàm số $f(x)$ đồng biến, hơn nữa $f(0) = -\frac{m}{2} > 0; f(2) = \frac{4-m}{4} > 0$

nên

$\max_{[0;2]} |f(x)| + 2 \min_{[0;2]} |f(x)| \geq 4 \Leftrightarrow \frac{4-m}{4} + 2 \left(-\frac{m}{2} \right) \geq 4 \Leftrightarrow m \leq -\frac{12}{5}$.

Vậy $-4 < m \leq -\frac{12}{5} \Rightarrow m = -3..$

+ Xét $m < -4$: hàm số $f(x)$ nghịch biến, hơn nữa $f(0) = -\frac{m}{2} > 0$; $f(2) = \frac{4-m}{4} > 0$ nên

$$\max_{[0;2]} |f(x)| + 2 \min_{[0;2]} |f(x)| \geq 4 \Leftrightarrow -\frac{m}{2} + 2\left(\frac{4-m}{4}\right) \geq 4 \Leftrightarrow m \leq -2. \text{ Vậy } m < -4.$$

+ Xét $m > 4$: hàm số $f(x)$ đồng biến, hơn nữa $f(0) = -\frac{m}{2} < f(2) = \frac{4-m}{4} < 0$ nên

$$\max_{[0;2]} |f(x)| + 2 \min_{[0;2]} |f(x)| \geq 4 \Leftrightarrow \frac{m}{2} + 2\left(\frac{m-4}{4}\right) \geq 4 \Leftrightarrow m \geq 6. \text{ Vậy } m \geq 6.$$

Tóm lại: $m \in \left(-\infty; -\frac{12}{5}\right] \cup [6; +\infty)$. Nên trong $[-30; 30]$, tập S có 53 số nguyên.

Dạng 3: Tìm tham số để GTLN của hàm số $y = |f(x) + g(m)|$ trên đoạn $[a; b]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Ghi nhớ:

- $\max\{\alpha; \beta\} \geq \frac{\alpha + \beta}{2}$, dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \alpha = \beta$.
- $|\alpha| + |\beta| \geq |\alpha + \beta|$, dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \alpha, \beta \geq 0$.

Cụ thể

- Bước 1: Tìm $\alpha = \max_{[a;b]} f(x)$; $\beta = \min_{[a;b]} f(x)$.

- Bước 2: Gọi M là giá trị lớn nhất của $y = |f(x) + g(m)|$ thì

+))

$$M = \max\{|\alpha + g(m)|; |\beta + g(m)|\} \geq \frac{|\alpha + g(m)| + |\beta + g(m)|}{2} = \frac{|\alpha + g(m)| + |-\beta - g(m)|}{2},$$

dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow |\alpha + g(m)| = |-\beta - g(m)|$.

+) Áp dụng bất đẳng thức $\frac{|\alpha + g(m)| + |-\beta - g(m)|}{2} \geq \frac{|\alpha + g(m) - \beta - g(m)|}{2} = \frac{|\alpha - \beta|}{2}$,

dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow [\alpha + g(m)][-\beta - g(m)] \geq 0$.

- Bước 3: Kết luận $\min M = \frac{|\alpha - \beta|}{2}$ khi $g(m) = \frac{-\alpha - \beta}{2}$.

Ví dụ mẫu 1: Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^2 + 2x + m - 4|$ trên đoạn $[-2; 1]$ đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị của tham số m bằng

A. 1.

B. 3.

C. 4. D. 5.

Lời giải

Chọn B

Đặt $f(x) = x^2 + 2x$.

Ta có: $f'(x) = 2x + 2$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \in (-2; 1)$.

$f(-2) = 0$; $f(1) = 3$; $f(-1) = -1$.

Do đó $\max_{[-2; 1]} f(x) = 3$; $\min_{[-2; 1]} f(x) = -1$.

Suy ra: $\max_{[-2; 1]} y = \max\{|m-5|; |m-1|\} \geq \frac{|m-5| + |m-1|}{2} \geq \frac{|5-m+m-1|}{2} = 2$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} |m-5| = |m-1| \\ (5-m)(m-1) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow m = 3$ (thỏa mãn).

Ví dụ mẫu 2: Để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{2x - x^2} - 3m + 4$ đạt giá trị nhỏ nhất thì m bằng

A. $m = \frac{3}{2}$.

B. $m = \frac{5}{3}$.

C. $m = \frac{4}{3}$.

D. $m = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = [0; 2]$.

Đặt $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$, $x \in D$, ta có $f'(x) = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

$f(0) = 0$; $f(2) = 0$; $f(1) = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Suy ra: } P = \max_D y = \max \{|3m-4|; |3m-5|\} &\geq \frac{|3m-4|+|3m-5|}{2} \\ &\geq \frac{|5-3m+3m-4|}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} |3m-4| = |3m-5| \\ (5-3m)(3m-4) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow m = \frac{3}{2} \text{ (thỏa mãn).}$$

Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số là nhỏ nhất khi $m = \frac{3}{2}$.

Bài tập tương tự

Câu 1. Để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x + 2m - 1|$ trên đoạn $[0; 2]$ là nhỏ nhất. Giá trị của m thuộc khoảng?

- A. $[-1; 0]$. B. $(0; 1)$. C. $\left(\frac{2}{3}; 2\right)$. D. $\left(\frac{-3}{2}; -1\right)$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $f(x) = x^3 - 3x - 1 + 2m$ trên đoạn $[0; 2]$.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \notin [0; 2] \\ x = 1 \in [0; 2] \end{cases}.$$

$$f(0) = -1 + 2m, \quad f(1) = -3 + 2m, \quad f(2) = 1 + 2m$$

$$\text{nên ta có } \max_{[0; 2]} y = \max \{|2m-3|; |2m+1|\}.$$

$$\text{Ta có: } \max_{[-3; 1]} y \geq \frac{|2m+1|+|2m-3|}{2} \geq \frac{|2m+1+3-2m|}{2} = 2.$$

Dấu bằng khi $m = 2$.

Câu 2. Để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^3 - 12x + m + 1|$ trên đoạn $[1; 3]$ đạt nhỏ nhất. Giá trị của m bằng

- A. $\frac{23}{2}$. B. $\frac{7}{2}$. C. $-\frac{23}{2}$. D. $-\frac{7}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên $[1;3]$

+) Xét $g(x) = x^3 - 12x + m + 1$ trên $[1;3]$

$$g'(x) = 3x^2 - 12; g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 & (n) \\ x = -2 & (l) \end{cases}$$

+) Ta có:

$$f(1) = |m - 10|; f(2) = |m - 15|; f(3) = |m - 8|$$

$$\Rightarrow \max_{x \in [1;3]} f(x) = M = \max\{|m - 8|; |m - 15|\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M \geq |m - 8| \\ M \geq |m - 15| \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2M \geq |m - 8| + |m - 15| = |m - 8| + |15 - m| \geq |m - 8 + 15 - m| \geq 7$$

$$\Rightarrow M \geq \frac{7}{2}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} |m - 8| = |m - 15| \\ (m - 8)(15 - m) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{23}{2}.$$

$$\text{Vậy } m = \frac{23}{2}.$$