A. Phương pháp giải & Ví dụ

1. Định nghĩa: Cho hàm số y = f(x) xác định trên miền D

Số M gọi là giá trị lớn nhất của hàm số y = f(x) trên D nếu: $\begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f(x_0) = M \end{cases}$.

Kí hiệu: $M = \max\limits_{x \in D} f(x)$ hoặc $M = \max\limits_{D} f(x)$.

Số m gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số y = f(x) trên D nếu: $\begin{cases} f(x) \geq m, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f(x_0) = m \end{cases}$.

Kí hiệu: $m = \min\limits_{x \in D} f(x)$hoặc $m = \min\limits_{D} f(x)$

2. Quy trình tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sử dụng bảng biến thiên

Bước 1. Tính đạo hàm f'(x).

Bước 2. Tìm các nghiệm của f'(x) và các điểm f'(x)trên K.

Bước 3. Lập bảng biến thiên của f(x) trên K.

Bước 4. Căn cứ vào bảng biến thiên kết luận $\min\limits_{K} f(x), \max\limits_{K} f(x)$

3. Quy trình tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số không sử dụng bảng biến thiên

Trường hợp 1. Tập K là đoạn [a; b]

Bước 1. Tính đạo hàm f'(x).

Bước 2. Tìm tất cả các nghiệm x_i ∈[a; b] của phương trình f'(x) = 0 và tất cả các điểm α_i ∈ [a; b] làm cho f'(x) không xác định.

Bước 3.Tính f(a), f(b), f(x_i), f(α_i).

Bước 4. So sánh các giá trị tính được và kết luận $M = \max\limits_{[a;b]} f(x), m = \min\limits_{[a;b]} f(x)$.

Trường hợp 2. Tập K là khoảng (a; b)

Bước 1. Tính đạo hàm f'(x).

Bước 2. Tìm tất cả các nghiệm $x_i \in (a; b)$ của phương trình f'(x) = 0 và tất cả các điểm $\alpha_i \in (a; b)$ làm cho f'(x) không xác định.

Bước 3. Tính $A = \lim_{x \to a^+} f(x), B = \lim_{x \to b^-} f(x), f(x_i), f(\alpha_i).$

Bước 4. So sánh các giá trị tính được và kết luận $M = \max_{(a;b)} f(x), m = \min_{(a;b)} f(x).$

Chú ý: *Nếu giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) là A hoặc B thì ta kết luận không có giá trị lớn nhất (nhỏ nhất).*

Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ trên đoạn [-2; 2].

Hướng dẫn

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = -1 & \in (-2;\ 2) \\ x = 3 & \notin (-2;\ 2) \end{array}\right.$

Mà y(-2) = 0; y(2) = -20; y(-1) = 7.

Suy ra $\max_{[-2;\ 2]} y = 7;\ \min_{[-2;\ 2]} y = -20.$

Ví dụ 2: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \sqrt{4 - x^2}$

Hướng dẫn

Tập xác định: D = [-2; 2]. Ta có: $y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{\sqrt{4-x^2}-x}{\sqrt{4-x^2}}.$

Khi đó y' = 0 ⇔ $\sqrt{4 - x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}.$

Có $y(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$, y(2) = 2 ,y(-2) = -2.

Vậy $\underset{[-2;2]}{max}\, y = 2\sqrt{2}, \min_{[-2;2]} y = -2.$

Ví dụ 3: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số y = x - sin2x trên đoạn [π/2; π]

Hướng dẫn

Ta có y' = 1 - 2cos2x = 0 ⇔ cos2x = 1/2 = cos π/3 ⇔ x = ±π/6 + kπ.

Xét x ∈[(-π)/2; π] ta được x = ±π/6; x = 5π/6.

f((-π)/2) = -π/2; f(π) = π; f((-π)/6) = -π/6 + √3/2; f(π/6) = π/6 - √3/2; f(5π/6) = 5π/6 + √3/2.

Suy ra $\max_{\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]} y = \frac{5\pi+3\sqrt{3}}{6};\ \min_{\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]} y = \frac{-\pi}{2}$

B. Bài tập vận dụng

Câu 1: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số f(x) = x^3 - $3x^2$ - 9x + 35 trên đoạn [-4; 4]

Hiển thị đáp án

Hàm số f(x) liên tục trên [-4; 4]

Ta có f'(x) = $3x^2$ - 6x - 9; f'(x) = 0 ⇔ $\left[\begin{array}{ll} x = -1 & \in (-4;4) \\ x = 3 & \in (-4;4) \end{array}\right.$

f(-4) = -41; f(-1) = 40; f(3) = 8;f(4) = 15.

Do đó

$$\min_{x\in[-4;4]} f(x) = f(-4) = -41, \max_{x\in[-4;4]} f(x) = f(-1) = 40$$

Câu 2: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{3x-1}{x-3}$ trên [0; 2]

Hiển thị đáp án

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn [0; 2].

Ta có $y' = \frac{-8}{(x-3)^2} < 0, \forall x \in [0;2]$.

Tính y(0) = 1/3; y(2) = -5.

Suy ra $\max\limits_{[0;2]} y = \frac{1}{3}$ khi $x = 0$, $\min\limits_{[0;2]} y = -5$ khi $x = 2$.

Câu 3: Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2+3}{x-1}$ trên đoạn [2; 4]. Tìm m.

Hiển thị đáp án

Hàm số $y = \frac{x^2+3}{x-1}$ liên tục trên đoạn [2;4].

Ta có $y'(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = -1 & \notin (2;\ 4) \\ x = 3 & \in (2;\ 4) \end{array}\right.$

Tính y'(2) = 7; y'(4) = 19/3; y'(3) = 6.

Suy ra m = 6.

Câu 4: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{-x^2 + 5x + 6}$ trên đoạn [-1; 6]

Hiển thị đáp án

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn [-1; 6].

Ta có: $y' = \frac{-2x+5}{2\sqrt{-x^2+5x+6}}$.

y' = 0 ⇔ x = 5/2 ∈[-1; 6].

y(-1) = y(6) = 0, y(5/2) = 7/2.

Vậy $\max\limits_{[-1;6]} y = \frac{7}{2}$ khi $x = \frac{5}{2}$ và $\min\limits_{[-1;6]} y = 0$ khi $x = -1, x = 6$.

Câu 5: Tìm tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số y = f(x) = |x| + 3 trên [-1; 1]

Hiển thị đáp án

Ta có $y = f(x) = |x| + 3 = \left[\begin{array}{lll} x+3 & \text{khi} & x \in [0;\ 1] \\ -x+3 & \text{khi} & x \in [-1;\ 0) \end{array}\right.$.

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{lll} y' = 1 & \text{khi} & x \in [0;\ 1] \\ y' = -1 & \text{khi} & x \in [-1;\ 0) \end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số đã cho.

x	-1		0		1
y'		$+$	||	$-$	||
y	4	$\searrow$	3	$\nearrow$	4

Vậy $\underset{[-1;\,1]}{Max}\, y + \underset{[-1;\,1]}{Min}\, y = 7.$

Câu 6: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = (x-6)\sqrt{x^2+4}$ trên đoạn [0; 3]

Hiển thị đáp án

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn [0; 3].

Ta có: $y' = \dfrac{2x^2-6x+4}{\sqrt{x^2+4}}, x \in [0;3].$

y' = 0 ⇔ $\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Tính y(1) = -5√5; y(0) = -12; y(2) = -8√2; y(3) = -3√13.

Suy ra $\max\limits_{[0;3]} y = -3\sqrt{13}$ khi $x = 3$, $\min\limits_{[0;3]} y = -12$ khi $x = 0$.

Câu 7: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2\sin^2 x + 2\sin x - 1$ bằng

Hiển thị đáp án

TXĐ: D = R . Đặt t = sinx, -1 ≤ t ≤ 1. Khi đó $y = f(t) = 2t^2 + 2t - 1$

Ta tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số y = f(t) trên đoạn [-1; 1]. Đó cũng là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên R.

Ta có: f'(t) = 4t + 2; f'(t) = 0 ⇔ t = -1/2 ∈(-1; 1); f(-1) = -1; f(-1/2) = -3/2; f(1) = 3

Do đó $\max\limits_{t\in[-1;1]} f(t) = f(1) = 3$, $\min\limits_{t\in[-1;1]} f(t) = f\left(\frac{-1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$

Câu 8: Cho hàm số $y = \frac{\sin x+1}{\sin^2 x+\sin x+1}$. Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho. Tìm M và m.

Hiển thị đáp án

Đặt t = sinx, -1 ≤ t ≤ 1 ⇒ $\boldsymbol{y = f(t) = \frac{t+1}{t^2+t+1}, f'(t) = \frac{-t^2-2t}{(t^2+t+1)^2}}$

$$\boldsymbol{f'(t) = 0} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \boldsymbol{t = 0 \in [-1;1]} \\ \boldsymbol{t = -2 \notin [-1;1]} \end{array}\right. \Rightarrow \boldsymbol{f(0) = 1},\ \boldsymbol{f(-1) = 0},\ \boldsymbol{f(1) = \frac{2}{3}}. \text{ Vậy } M = 1,\ m = 0$$